UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE - AIX-MARSEILLE II
U.F.R. DE SCIENCES

THÈSE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE

Spécialité : MATHÉMATIQUES DISCRÈTES ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

présentée et soutenue publiquement par

Pierre BOUDES

le 20/12/2002

TITRE :

HYPERCOHÉRENCES ET JEUX

Directeur de thèse :
Thomas EHRHARD

Rapporteurs :
MM. Pierre-Louis CURIEN
Glynn WINSKEL

Jury :
MM. Patrick BAILLOT
Pierre-Louis CURIEN
Thomas EHRHARD
Jean-Yves GIRARD
James LAIRD
Glynn WINSKEL

Hypercohérences et Jeux

Pierre BOUDES
Institut de Mathématiques de Luminy

13 janvier 2004

Table des matières

Remerciements

Mes plus vifs remerciements vont à Thomas Ehrhard, pour la qualité exceptionnelle de son encadrement et pour l'attention sans faille qu'il a su porter à cette thèse au cours de son élaboration, toujours avec une grande humanité.

Je dois beaucoup à Jean-Yves Girard, dont les travaux sont une source d'inspiration toujours renouvelée, ayant largement participé à mon éveil scientifique, dans une équipe de recherche d'un dynamisme très stimulant. Je tiens ici à l'en remercier.

Merci à Pierre-Louis Curien pour la qualité de ses suggestions et de son écoute, lors des quelques discussions scientifiques que nous avons pu avoir, en particulier, lors de sa relecture de cette thèse.

Je tiens à remercier Glynn Winskel pour avoir mené à bien la relecture de cette thèse, avec un regard extérieur, et malgré la difficulté due à la langue.

Merci à Martin Hyland pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail sur la non-uniformité, lors de ses passages à Marseille, et pour m'avoir aiguillé vers la conjecture de Longley.

Les travaux de James Laird, d'une richesse étonnante, ont suscité mon intérêt et m'ouvrent de nouvelles pistes de recherche en connexion avec cette thèse, ce dont je le remercie.

Merci à Patrick Baillot et à Olivier Laurent, pour toutes ces discussions que nous avons eu, notamment lorsque nous partagions le même bureau, et qui m'ont beaucoup apporté d'un point de vue scientifique.

Merci à Alexandra Bruasse-Bac avec qui j'ai pu partager de nombreuses fois mon intérêt pour les travaux de Thomas Ehrhard.

Merci à Samuel Tronçon dont le regard neuf sur les travaux de Jean-Yves Girard a donné matière à de nombreuses et intéressantes discussions.

L'équipe Logique de la Programmation a su m'accueillir dans une véritable dynamique de recherche. Je tiens à remercier particuliérement Marie-Renée Fleury-Donnadieu, Myriam Quatrini et Laurent Regnier pour la qualité de cet accueil.

Merci à Pierre Barthelémy, France Bodin, Jeanine Brohan, Jean-Bruno Erismann et à Aurélia et Éric Lozingot pour leur efficacité à faire fonctionner le laboratoire.

Parmi les thésards de l'équipe, je remercie aussi Sylvain Lippi et Virgile Mogbil ainsi que Christophe Gaubert, Pierre Hyvernat et Alaeddine Benrhouma pour avoir participé à un climat chaleureux, propice à la recherche.

Mes remerciements vont encore à Cédric Lhoussaine avec qui j'ai découvert le monde de la recherche, en bonne amitié, et pour son soutien.

Merci aussi à Lorenzo Tortora de Falco, pour m'avoir permi de séjourner à Rome et avoir su m'y faire partager son intérêt scientifique.

Je tiens à remercier ma famille et, en premier lieu, mes parents, Alix et Antoine, ainsi que Cécile Clozel pour leur soutien et pour avoir éveillé en moi le goût du travail intellectuel.

Un grand merci à ma compagne, Hélène Tennéroni, pour son soutien indéfectible et pour tout le reste.

CHAPITRE 1

Introduction

Cette thèse porte sur les propriétés mathématiques du Calcul. Ce que nous entendons ici par Calcul est, au sens large, l'activité qui consiste à transformer des ingrédients selon des directives simples pour produire un résultat. Plus précisément, nous nous intéressons à la part mathématisable de cette activité. Aussi cette thèse ne porte-t-elle pas sur la cuisine, les procédures juridiques ou le *jiu-jitsu* (« règles procédurales de la souplesse »).

Nous distinguons, traditionnellement, deux niveaux de mathématisation dans l'étude des propriétés mathématiques du Calcul. Au premier niveau, il s'agit de représenter le Calcul dans les mathématiques, c'est le niveau de la Syntaxe. Se rattachent à ce niveau : la part *mécanique* des mathématiques (le calcul arithmétique tel qu'enseigné à l'école, par exemple), les machines abstraites, les automates, la machine de Turing, les circuits booléens (à l'œuvre dans les calculettes, les ordinateurs,...), les langages de programmation. La preuve formelle en logique mathématique, en partie née du désir de mécaniser le raisonnement, appartient aussi à ce niveau. Pour le calcul sur des entiers, le contenu opératoire des différentes syntaxes (ce qui est calculable) est équivalent. On peut alors parler du Calcul sur les entiers. Au second niveau, nous devons donner une définition mathématique de certaines propriétés du Calcul. Il s'agit d'interpréter le Calcul par des notions mathématiques qui fassent sens. C'est le niveau de la Sémantique, sur lequel se situe cette thèse. Nous nous intéressons, plus précisément, à la sémantique en ce qu'elle offre un point de vue distant, potentiellement porteur d'intuitions nouvelles sur le Calcul.

Les objets qui agissent au sein du Calcul, ses agents, sont les algorithmes. Une donnée pour un calcul peut toujours être considérée comme le résultat fourni par un algorithme qui n'attend pas d'entrée. Dans notre cadre, les agents sont typés. Les types définissent quels agents agissent sur quels autres agents. Un agent de type $A \to B$ s'applique à un agent de type A pour donner un agent de type B. La notion importante est celle d'exécution. L'exécution du calcul est représentée par une procédure de réécriture sur les agents. La procédure de réécriture met les agents sous *forme normale*. La forme normale d'un agent de type B obtenu en appliquant un agent de type $A \to B$ à un agent de type A, est le résultat de cette l'application. L'application de la fonction carré, de type $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, à l'entier naturel 2 donne l'entier 2^2 qui se réécrit sous forme normale en l'entier 4.

Une preuve formelle est une succession finie d'opérations sur des formules logiques produisant une formule conclusion. Si on a une preuve de la formule A et une preuve de la formule A *implique* B, alors l'opération de *modus ponens* nous permet de former une preuve de B. Cette preuve de B utilise un lemme qui est la preuve de A *implique* B. En Déduction Naturelle on a une procédure de réécriture des preuves qui élimine l'usage des lemmes.

Il existe une correspondance entre les preuves en Déduction Naturelle et les algorithmes, exprimés en λ-calcul typé, pour laquelle la procédure d'élimination des lemmes coïncide avec la procédure d'exécution des algorithmes (la β-réduction des termes). Cette correspondance est appelée correspondance de Curry-Howard. Elle nous permet de voir les preuves formelles comme des algorithmes.

La Logique Linéaire, introduite par J.-Y. Girard ([Gir87]), est une syntaxe ayant de nombreuses bonnes propriétés. Une des caractéristiques importantes de la logique linéaire est qu'elle représente un calcul sensible aux ressources. La notion de ressource remplace ici celle de donnée. Ainsi A *flèche linéaire* B est une formule qui signifie que si on a exactement une ressource de type A, alors on peut produire une ressource de type B, en consommant cette ressource de type A. La ressource A *flèche linéaire* B est elle aussi consommée. Bien entendu, il est aussi possible de représenter des ressources indéfiniment disponibles. C'est le rôle des modalités exponentielles. Ainsi, *bien sûr* A, noté $!A$, signifie qu'une ressource de type A est disponible autant de fois que nécessaire. La logique linéaire a un grand pouvoir expressif. On peut, par exemple, traduire la Déduction Naturelle en logique linéaire. La formule A *implique* B se traduit en $!A$ *flèche linéaire* B. C'est ce qu'on appelle la décomposition linéaire de la flèche intuitionniste. La notion d'exécution, en logique linéaire, est représentée par l'élimination des coupures (une forme d'élimination des lemmes, due à Gentzen).

Dans cette thèse nous ne nous intéressons pas vraiment à la nature des résultats d'un algorithme, au temps de calcul qu'il nécessite ou à ce qui est calculable et à ce qui ne l'est pas. Nous nous intéressons plutôt à la nature du Calcul et plus précisément à certaines des ses propriétés intrinsèques. Ces propriétés sont notamment :

Le déterminisme. Sur une même entrée, nous avons un même résultat.

La séquentialité. Un calcul s'exécute étape par étape.

La convergence ou la terminaison. les calculs terminent, autrement dit, on obtient toujours un résultat, et ce, en un nombre fini d'étapes.

Nous interprétons les agents du Calcul par des objets invariants par exécution. L'interprétation obtenue est ce qu'on appelle une sémantique dénotationnelle. La dénotation d'un agent est l'agent en lequel il se réécrit, sa forme normale. Ainsi la dénotation de $2 + 1$ est 3, et en sémantique dénotationnelle $2 + 1$ et 3 doivent avoir la même interprétation. La donnée d'une fonction d'interprétation des agents est ce qu'on appelle un modèle dénotationnel.

La logique linéaire est très liée à l'activité en sémantique dénotationnelle. Une part de la découverte de la logique linéaire peut d'ailleurs être attribuée à cette activité. En effet, l'interprétation de la Déduction Naturelle dans les espaces cohérents a, la première, révélé la décomposition linéaire de la flèche intuitionniste. Dans cette thèse, nous travaillons principalement avec la logique linéaire comme syntaxe du Calcul.

Une interprétation dénotationnelle standard associe aux algorithmes les fonctions qu'ils calculent. Le modèle obtenu est alors dit *extensionnel*. Le fait qu'une fonction associe à une entrée un unique résultat correspond au déterminisme. La convergence est le fait que la fonction associée à un algorithme est totale. La convergence en un nombre fini d'étapes correspond au fait que, pour calculer un résultat fini, la fonction associée à un algorithme n'utilise qu'une part finie des données. Dans le modèle des espaces cohérents, les agents sont interprétés par des fonctions stables. La stabilité assure que, pour chaque atome de résultat calculé par une fonction sur une donnée, il existe une part minimale de la donnée qui permet de calculer cet atome de résultat. La séquentialité est plus mystérieuse au niveau des fonctions. On peut l'exprimer pour des agents simples calculant des résultats atomiques sur des données atomiques. Mais la généralisation naturelle de cette définition de la séquentialité ne permet pas de définir un modèle dénotationnel dans un cadre extensionnel ([Ehr99]).

La stabilité forte a été introduite par A. Bucciarelli et T. Ehrhard ([BE94]). Dans une certaine mesure, elle permet d'exprimer la séquentialité dans un cadre extensionnel ([Ehr99]). Les hypercohérences forment un modèle de la logique linéaire, introduit par T. Ehrhard ([Ehr93]), donnant une présentation simplifiée de la stabilité forte sous forme de cliques, représentant les agents, dans des hypergraphes, représentant les formules.

La séquentialité est mieux représentée dans un cadre sémantique où les agents sont interprétés par l'historique des interactions atomiques dont ils sont capables avec d'autres agents. Les sémantiques dénotationnelles de ce type sont *dynamiques* au sens où le temps y est explicitement représenté. Par opposition, les sémantiques qui ne manipulent pas des historiques d'interactions, comme les espaces cohérent ou les hypercohérences, sont *statiques*. Une sémantique dynamique typique est la sémantique des jeux. Les formules de la logique y sont interprétées par des jeux à deux joueurs, représentés par un ensemble de parties (des historiques de rencontre entre *le Joueur* et *l'Opposant*), et les agents y sont représentés par des stratégies pour le Joueur. Le modèle des algorithmes séquentiels, introduit par G. Berry et P.-L. Curien ([BC82]), est un modèle de la séquentialité, qui peut être reformulé dans la sémantique des jeux ([Cur93]).

Par ailleurs, les sémantiques des jeux ont, les premières, fourni un résultat de surjectivité de la fonction d'interprétation, pour le calcul PCF (*Programming Computable Functions*). Cette surjectivité établit que tout ce qui est un agent au sens du modèle (une stratégie d'une certaine espèce) est réellement un agent au sens de la syntaxe (un terme de PCF). On dit que les agents du modèle sont définissables et que le modèle est pleinement complet. Dans cette thèse, nous ne cherchons pas à obtenir des résultats de pleine complétude. Ainsi les agents, au sens de la sémantique, ne seront pas forcément des agents, au sens de la syntaxe.

Plus généralement, la sémantique des jeux est un bon moyen de rendre compte de manière abstraite de certaines propriétés du Calcul, d'un point de vue informatique. En fait, les sémantiques des jeux, bien que dénotationnelles, s'apparentent plus à de la syntaxe. Dans [Cur98], P.-L. Curien décrit les arbres de Böhm abstraits, une syntaxe dans laquelle les stratégies de la sémantique des jeux et les termes en forme normale de PCF peuvent être représentés. La distinction entre Syntaxe et Sémantique est aussi dépassée dans la Ludique, introduite par J.-Y. Girard ([Gir01]). La Ludique est à la fois un calcul inspiré de la logique linéaire, où les agents (les *desseins*) sont toujours en forme normale, et une sémantique des jeux. L'interprétation est ici fournie en interne, par la syntaxe, par le biais de *l'interactivité interne* du Calcul. Un agent y est interprété par l'ensemble des interactions (les étapes d'une élimination des coupures) dont il est capable lors de la rencontre (la coupure) avec des contre-agents.

Dans [Ehr99], T. Ehrhard montre que les hypercohérences forment le *collapse extensionnel* des algorithmes séquentiels. C'est ce résultat qui nous permet de dire que les hypercohérences expriment la séquentialité dans un cadre extensionnel. Dans [Lai01], J. Laird, étend ce résultat en montrant que différents modèles de jeux, dont les algorithmes séquentiels, définissent le même collapse extensionnel.

Ce résultat est surprenant à plus d'un titre. Le temps n'est pas explicitement représenté dans les hypercohérences comme il l'est dans les jeux, pourtant les hypercohérences arrivent à rendre compte de la séquentialité qui suppose une représentation du temps. Les hypercohérences doivent donc posséder une représentation implicite du temps. Par ailleurs, le modèle des hypercohérences repose sur des objets mathématiques simples (les hypergraphes) et pourtant ce modèle exprime le Calcul aussi efficacement que le font les modèles de jeux du point de vue extensionnel. Il est alors naturel de chercher à expliciter la représentation du temps dans les hypercohérences. L'objectif est de comprendre comment les hypercohérences arrivent à rendre compte des propriétés du Calcul, et notamment de la séquentialité. Nous pensons qu'une telle compréhension est d'un grand intérêt du fait de la simplicité du modèle des hypercohérences.

Dans [Ehr99], la comparaison entre les algorithmes séquentiels et les hypercohérences n'est pas faite directement à tous les types : cette comparaison utilise notamment un résultat de définissabilité relative. Ainsi, ce résultat de comparaison ne donne pas une anatomie du lien entre hypercohérences et modèles de jeux.

Dans le chapitre 3, nous utilisons une technique de déploiement d'hypergraphes, analogue à celle introduite par T. Ehrhard dans [Ehr00], pour reconstruire une temporalité dans les hypercohérences. Le déployé d'une hypercohérence est un arbre que nous pouvons voir comme un jeu. Nous montrons que, sous certaines hypothèses, la modélisation hypercohérente des formules logiques coïncide par déploiement avec des constructions standards dans les jeux. Le résultat le plus important de ce chapitre concerne l'exponentielle hypercohérente, pour laquelle nous obtenons une construction similaire à celle modélisant le *bien sûr* dans les algorithmes séquentiels.

Nous ne pouvons pas utiliser les résultats obtenus sur le déploiement pour donner une anatomie complète du lien avec les jeux. En effet,la correspondance par déploiement entre les jeux et les hypercohérences ne peut être établie que sous certaines hypothèses qui confinent à de « petits » types logiques. Les résultats de ce chapitre doivent donc être considéré comme de nature heuristique. Dans cet esprit, l'introduction des jeux polarisés par O. Laurent ([Lau02b]), nous a permis d'analyser les déployés d'hypercohérences comme des jeux polarisés. Ceci suggère que le bon cadre pour effectuer la comparaison entre hypercohérences et jeux est la Logique Linéaire Polarisée (LL*pol*).

Le modèle hypercohérent standard est finitaire, ce qui signifie qu'en l'absence de types de base infinis, comme celui des entiers, les hypercohérences du modèle sont des hypergraphes ayant un nombre fini de sommets. Néanmoins, du point de vue du Calcul, il est naturel de vouloir modéliser les entiers. Par ailleurs, il existe des variantes dans la modélisation des exponentielles qui rendent le modèle hypercohérent non finitaire. Pour ces raisons, une partie du chapitre 3, est consacrée à équiper les hypercohérences d'une relation de cohérence infinie qui nous permet d'établir les résultat de déploiement, en toutes généralités, pour des hypergraphes ayant un nombre au plus dénombrable de sommets.

Dans le chapitre 4, nous synthétisons une sémantique de jeux en suivant les résultats analytiques du chapitre 3. Comme dans[Lau02b], les jeux sont polarisés. Ils sont, de plus, équipés d'un bord. Le bord est le lieu où les parties (les historiques d'interactions) terminent. Cette sémantique des jeux donne un modèle de la version polarisée du fragment de la logique linéaire sans exponentielles, MALLP. Les hypercohérences sont aussi un modèle de MALLP. L'opération qui consiste à oublier les historiques pour ne conserver que les coups du bord fournit une projection du modèle de jeux dans les hypercohérences qui est compatible avec l'interprétation des agents. Ce résultat est valable pour MALLP et nous devons l'étendre aux exponentielles pour donner un cadre correct de comparaison entre les hypercohérences et les jeux.

Les constructions des jeux polarisés à bord opèrent de manière symétrique sur les débuts et fin d'historiques. En fait, ce modèle de MALLP est réversible : l'opération inversant le temps dans les historiques correspond, d'une part, au passage à l'orthogonal sur les formules et, d'autre part, laisse inchangée l'interprétation des preuves, à un rétablissement des polarités près. La signification de cette réversibilité demande encore a être comprise.

À la fin de ce chapitre, nous montrons que la donnée d'un modèle de la logique linéaire intuitionniste (ILL) dans les jeux négatifs suffit à étendre notre modèle de jeux aux exponentielles, pour obtenir un modèle de LL*pol*.

Le chapitre 5 est consacré à une présentation des constructions exponentielles dans les jeux. Ceci fournit un modèle de ILL et donc un modèle de LL*pol*. La construction exponentielle que nous employons n'est pas une construction standard. Elle se situe entre celle employée dans les algorithmes séquentiels et les constructions exponentielles des sémantiques de jeux introduites par S. Abramsky, R. Jagadeesan et P. Malacaria dans [AJM94] (AJM), d'une part et par M. Hyland et L. Ong dans [HO00] (HO), d'autre part. Il est malheureusement impossible d'obtenir un modèle de ILL pour l'équivalent de la construction exponentielle des algorithmes séquentiels dans les jeux à bord.

Le travail effectué dans ces trois chapitres soulève de nouvelles difficultés pour la comparaison entre jeux et hypercohérences. Une part de ces difficultés tient à la propriété d'*uniformité* des exponentielles. Sans entrer dans le détail, dans un cadre uniforme, les agents n'anticipent leurs arguments que comme produits par d'autres agents. Cette uniformité fait que l'hypergraphe interprétant une formule $!A$ dans les hypercohérences a pour sommets un ensemble d'agents de type A. En conséquent, il est nécessaire de manipuler la notion sémantique d'agent (l'équivalent des preuves) pour construire l'interprétation d'une formule contenant des modalités exponentielles.

Dans un cadre uniforme, il n'y a aucune chance de pouvoir étendre aux exponentielles, de façon totale, la projection des jeux sur les hypercohérences, que nous avons obtenue au chapitre 4. À l'opposé, dans un cadre non-uniforme, l'interprétation des formules peut être faite sans avoir à considérer l'interprétation des preuves, comme c'est déjà le cas pour le fragment de la logique linéaire n'utilisant pas les exponentielles. Dans un tel cadre, il devrait être facile de projeter les jeux sur les hypercohérences. Pour autant, si les jeux fournissent facilement un cadre non-uniforme il n'en va pas de même des hypercohérences.

Les sections 6.3 et 6.4 du chapitre 6, sont dédiées à trouver une notion d'exponentielle non-uniforme pour la sémantique hypercohérente. Nous utilisons pour cela un procédé introduit par A. Bucciarelli et T. Ehrhard ([BE01]) qui fournit des sémantiques dénotationnelles statiques non-uniformes. Ce procédé ne fournit pas directement des hypercohérences non-uniformes. Par ailleurs, le modèle le plus approchant des hypercohérences obtenu par ce procédé avait un certain nombre de défauts au nombre desquels l'impossibilité de la comparaison avec le cadre hypercohérent standard (uniforme). Nous remplaçons la modélisation des exponentielles fournie par ce procédé par des constructions plus canoniques, au sens de la théorie des catégories (les exponentielles *libres*). Nous obtenons ainsi des modèles non-uniformes généralisant respectivement les espaces cohérents et les hypercohérences. Nous obtenons aussi un nouveau modèle, les multicohérences. Étonnamment, ces modèles sont déterministes, au sens où un agent et un contre-agent s'intersectent en au plus un point. Le retour aux modèles uniformes est alors extrêmement simple : il s'agit d'une restriction, après coup, aux *lieux de l'interaction*.

En utilisant un résultat de P.-A. Melliès ([s02b]), nous caractérisons les collapse extensionnels définis par ces différents modèles. Nous montrons aussi que les multicohérences contredisent une conjecture, émise par J. Longley ([Lon02]), selon laquelle la seule notion de séquentialité d'ordre supérieur est donnée par les hypercohérences, à extensionnalité près.

Les modèles non-uniformes considérés dans le chapitre 6 sont bâtis sur un même modèle sous-jacent : le modèle des ensembles et des relations. Ceci fournit un cadre commun qui permet de combiner simplement les différents modèles non-uniformes.

Dans ce chapitre nous introduisons aussi une notion d'interaction interne du calcul au niveau de la logique linéaire, en nous inspirant d'idées développées par J.-Y. Girard dans la Ludique. Nous représentons cette interaction dans le modèle des relations, par la simple intersection d'ensembles. Nous utilisons cette notion très naïve d'interaction pour développer le point de vue que l'uniformité sémantique correspond à une uniformité de la syntaxe, à travers une restriction aux seules interactions possibles.

Dans le dernier chapitre, en guise de conclusion, nous discutons les suites à donner à ce travail.

CHAPITRE 2

Préliminaires mathématiques

2.0.1 Notations, conventions

Nous utilisons la notation $\fatsemi$ pour la composition des morphismes dans une catégorie et plus précisément si $\mathcal{C}$ est une catégorie, si A, B et C sont des objets de $\mathcal{C}$ et si on a deux morphismes $f \in \mathcal{C}(A, B)$ et $g \in \mathcal{C}(B, C)$ alors $f \fatsemi g$ est un morphisme de $\mathcal{C}(A, C)$.

Polarités. On se donne un ensemble de deux éléments $\{\text{négatif}, \text{positif}\}$ noté $\{-, +\}$. Une polarité ϵ est un élément de cet ensemble. On note $-\epsilon$ la polarité inverse de ϵ (égale à $-$ si $\epsilon = +$ et $+$ si $\epsilon = -$).

Indexation : familles, suites. Une *famille* sur un ensemble E est une fonction d'un ensemble I dans E. L'ensemble I est appelé ensemble d'indices ou *ensemble indexant* de la famille. On utilise souvent la notation $(f_i)_{i \in I}$ où $f_i = f(i)$ pour donner la famille f. La famille est *finie* lorsque I est fini. Plus généralement le *cardinal d'une famille* est le cardinal de son ensemble indexant. Lorsque la famille f est finie et qu'il existe une énumération de l'ensemble indexant $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ on utilise aussi les notations $\langle (f(i_1), i_1), \ldots, (f(i_n), i_n) \rangle$ ou $\langle f_{i_1}, \ldots, f_{i_n} \rangle$ pour donner la famille. Le *support* d'une famille, est l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(i) \mid i \in I\}$. Un élément *apparaît* dans une famille f lorsque qu'il appartient à son support. Deux familles $f : I \to E$, $g : J \to F$ sont *équivalentes par ré-indexation* lorsqu'il existe une bijection $h : I \to J$ entre leurs ensembles indexant telle que $g \circ h = f$.

Une *suite* est une famille dont l'ensemble indexant est linéairement ordonné. La *longueur* d'une suite est son cardinal. Deux suites $f : (I, \leq_I) \to E$ et $g : (J, \leq_J) \to F$ sont *équivalentes par ré-indexation* lorsqu'il existe un isomorphisme d'ordre $h : (I, \leq_I) \to (J \leq_J)$ entre leurs ensembles indexant tel que $g \circ h = f$. L'équivalence par ré-indexation est une relation d'équivalence compatible avec la cardinalité sur les familles et sur les suites. La *suite vide* sur un ensemble E est l'unique suite d'ensemble indexant $\emptyset$ sur E.

Multi-ensembles. Soit E un ensemble. De la même manière qu'un ensemble F d'éléments de E (un sous-ensemble de E) est donné par une fonction de $E \to \{0, 1\}$ (la fonction caractéristique χ_F de F), un multi-ensemble sur un ensemble E est la donnée d'une fonction $\mu : E \to \mathbb{N}$. Le support $\operatorname{supp}(\mu)$ d'un multi-ensemble μ est le sous-ensemble $\mu^{-1}(\mathbb{N}^*)$ de E (de fonction caractéristique $\chi_{\mathbb{N}^*} \circ \mu$). Un multi-ensemble μ est fini si son support $\mu^{-1}(\mathbb{N}^*)$ est fini. La donnée d'une famille $f : I \to E$ finie définit un multi-ensemble fini $a \mapsto \sharp f^{-1}(a)$ noté $[f(i) \mid i \in I]$ de support le support de la famille f. Deux familles finies définissent le même multi-ensemble fini ssi elles sont équivalentes par ré-indexation. Et les classes d'équivalence par ré-indexation sur les familles finies de E sont les multi-ensembles finis sur E. Le *multi-ensemble vide*, noté $[]$, est la fonction constante égale à zéro. On écrit encore $[a_1, \ldots, a_n]$ pour le multi-ensemble $[a_i \mid 1 \leq i \leq n]$. Si μ est un multi-ensemble, on écrit parfois $a \in \mu$ pour $a \in \mathrm{supp}(\mu)$.

L'*union* de deux multi-ensembles f et g, notée $f+g$, est la fonction $a \mapsto f(a)+g(a)$. Cette union binaire se généralise en une union finie, (sur des familles de multi-ensembles) notée $\sum$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $f : E \to \mathbb{N}$ un multi-ensemble, $k.f$ désigne le multi-ensemble $a \mapsto k \times f(a)$. Si $f = g+h$ alors la notation $f-g$ désigne le multi-ensemble h. Les multi-ensembles sur un même ensemble de base sont naturellement ordonnés par l'ordre extensionnel (ou ordre ponctuel des fonctions) noté simplement $\leq$, *i.e.* $f \leq g$ ssi $\forall a \in E, f(a) \leq g(a)$.

On note $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des multi-ensembles d'éléments de E, $\mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(E)$ l'ensemble des multi-ensembles finis d'éléments de E et $\mathcal{M}_{\mathsf{fin}}{}^*(E)$ l'ensemble des multi-ensembles finis et non vides d'éléments de E. Si f est une fonction de E dans un ensemble F alors f s'étend en une fonction de $\mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(E)$ dans $\mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(F)$ en posant $f([a_i \mid i \in I]) = [f(a_i) \mid i \in I]$.

Mots. Un *alphabet* est un ensemble au plus dénombrable. Un élément d'un alphabet est une *lettre*. Un *mot* sur un alphabet A est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence par ré-indexation sur les suites finies de A. Les suites éléments d'un mot m sont toutes d'une même longueur, appelée la *longueur* du mot m et notée $||m||$. Un mot m sera souvent identifié a son élément indexé par les $||m||$ premiers entiers non nuls. Sur tout alphabet, il existe un unique mot contenant une seule suite (la suite vide, de longueur 0), ce mot est appelé le *mot vide* et est noté ε. Si m est un mot sur un alphabet A qui est différent du mot vide, alors toutes les suites éléments de m se terminent par un même élément a de A, la *dernière lettre* du mot, et l'ensemble des suites éléments de m tronquées à la longueur $||n|| - 1$ est encore un mot sur A, appelé le *préfixe immédiat* de m. Réciproquement, si a est une lettre sur l'alphabet A et si m est un mot sur A alors il existe un unique mot, noté $m \cdot a$, de dernière lettre a et de préfixe immédiat m. On appelle *concaténation* l'opération $\cdot$. Un mot sur un alphabet A est donc soit le mot vide soit la concaténation d'un mot sur A et d'une lettre de A : $m := \varepsilon \mid m \cdot a$. De même un mot non vide admet une unique *première lettre* et un unique *suffixe immédiat* et un mot m et une lettre a définissent un unique mot $a \cdot m$ de suffixe immédiat m et de premier élément a. La concaténation s'étend en une opération entre mots, associative et d'élément neutre ε en posant $m \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot m = m$ et $(m \cdot a) \cdot m' = m \cdot (a \cdot m')$.

On note A^* l'ensemble des mots sur A et $a_1 \ldots a_n$ le mot $(\ldots(\varepsilon \cdot a_1) \cdot \ldots) \cdot a_n$. Si A^* est un alphabet, et S un sous-ensemble de A^* alors la relation $\preccurlyeq$ définie sur les éléments de S par $s \preccurlyeq s'$ ssi $s' = s \cdot t$ pour un certain élément t de A^* est une relation d'ordre, appelée *ordre préfixe*. On note $\prec$ l'ordre préfixe strict. On note $s \wedge s'$ le plus grand préfixe commun de s et de s'. La clôture préfixe d'un ensemble E de mots sur un alphabet $A*$, notée $\triangledown E$, est le sous-ensemble $\{p \in A^* \mid \exists s \in E, p \preccurlyeq s\}$ de A^*. Lorsque $m = s \cdot w$ on note $[m - s]$ le mot w. Lorsque $m = s_1 \cdot t \cdot s_2$ on dit que le mot t est un facteur de m et on dit que le mot t prolonge le mot s_1 dans le mot m. On généralise la concaténation à des ensembles de mots en écrivant $E \cdot F$ pour $\{s \cdot s' \mid s \in E, s' \in F\}$ lorsque cette écriture fait sens. Un alphabet A sera parfois considéré comme l'ensemble des mots de longueur 1 de A^* et un ensemble de mots sera parfois considéré comme un alphabet. En particulier $(A \cdot A)^*$ est l'ensemble des mots de A^* de longueur 2.

Projections. Si A et B sont des alphabets, si $m \in B^*$ et si $A \subseteq B$ alors $m{\upharpoonright}A$ est le mot de l'alphabet A défini par $\varepsilon{\upharpoonright}A = \varepsilon$, $m \cdot b{\upharpoonright}A = (m{\upharpoonright}A) \cdot b$ si $b \in A$ et $m{\upharpoonright}A$ sinon.

Graphes et forêts de mots. Un graphe non orienté connexe acyclique est une *algue*. Si on distingue un sommet dans une algue celle-ci est un *arbre* et ce sommet est sa *racine*. Une forêt est un ensemble d'arbres.

arbre de mots. La donnée d'un ensemble de mots S définit une forêt (ou un arbre si tous les mots de l'ensemble commencent par la même lettre). Ses sommets sont les préfixes non vides d'éléments de S, ses racines sont les mots d'une lettre et ses arrêtes sont entre mots en relation de précédence pour l'ordre préfixe. Réciproquement une forêt peut être décrite par un ensemble de mots sur l'alphabet égal à l'ensemble de ses sommets, unique à clôture par préfixe près. Dans le cadre des ensembles de mots, nous préférons parler d'arbre plutôt que de forêt et nous définissons donc l'arbre des mots donné par un ensemble de mots S comme l'ensemble des préfixes (éventuellement vide) des mots de S équipé de la précédence de l'ordre préfixe. Ceci correspond à ajouter un élément à chaque forêt de manière à en faire des arbres.

Soient A et B deux alphabets, $E \subseteq A^*$ et $F \subseteq B^*$. Si $f : E \to F$ est une bijection qui préserve la taille des préfixes des paires de mots, au sens où

$$\forall s, s' \in E, \|f(s) \wedge f(s')\| = \|s \wedge s'\|$$

alors f est un *isomorphisme d'arbre*. Si f est donné par une bijection entre A et B on dit que l'isomorphisme d'arbre est *fort*. En particulier un isomorphisme d'arbres entre A^* et B^* est toujours fort. Cette notion d'isomorphisme est une généralisation de la notion usuelle d'isomorphisme entre forêts (définie comme un isomorphisme de graphes ou d'ordre, selon la définition choisie pour les forêts) qui correspondrait ici à prendre E et F clos par préfixes.

2.0.2 Logique linéaire, logique linéaire polarisée

Les *formules* (notations A, B, C,...) de la *logique linéaire* (LL) sont données par le langage :

$$\begin{aligned} A :=& 0 \mid \top \mid 1 \mid \bot \mid \\ & A \oplus B \mid A \,\&\, B \mid A \otimes B \mid A \parr B \mid \\ & A^\perp \mid ?A \mid !A. \end{aligned}$$

quotienté par les équations $A^{\perp\perp} = A$, $A^\perp \oplus B^\perp = (A \,\&\, B)^\perp$, $A^\perp \otimes B^\perp = (A \parr B)^\perp$ et $?A^\perp = (!A)^\perp$.

Un *contexte* (notation Γ, Δ) est un multi-ensemble de formules. On écrit $A_1, \ldots, A_n$ pour le contexte $[A_1, \ldots, A_n]$ et Γ, Δ désigne le contexte obtenu par union de Γ et Δ. Si $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ est un contexte alors $!\Gamma$ désigne le contexte $!A_1, \ldots, !A_n$ et $?\Gamma$ désigne le contexte $?A_1, \ldots, ?A_n$.

La donnée d'un contexte Γ définit un *séquent monolatère* $\vdash \Gamma$ (en notation droite), la donnée de deux contextes Γ et Δ définit un *séquent bilatère* noté $\Gamma \vdash \Delta$. Le signe $\vdash$ se lit *thèse*.

Une preuve (notation π, π',...) de la logique linéaire en calcul des séquents monolatères est la donnée d'un séquent monolatère, appelé *séquent conclusion*, et d'un arbre dont les arêtes sont étiquetées par des séquents monolatères et dont les sommets sont des occurrences de *règles* satisfaisant des contraintes de bonne formation relativement aux étiquettes de leurs arêtes adjacentes (et au séquent conclusion pour la règle à la racine de l'arbre). Ces règles et les contraintes qui leurs sont associées sont rappelées de façon synthétique dans le tableau 2.0.2. Les règles de la logique linéaires peuvent être présentées dans un cadre bilatère définissant les même preuves, modulo l'équation $\vdash A_1, \ldots, A_n, \Gamma = {A_1}^\perp, \ldots, {A_n}^\perp \vdash \Gamma$.

Dynamique. Il existe un ensemble (fini) de *règles de réécriture* sur les preuves de la logique linéaire tel que toute preuve π se réécrit en une preuve π' du séquent conclusion de π qui n'utilise pas la règle *coupure*. C'est le théorème de l'élimination des coupures. Dans le cadre de la logique linéaire, quelque soit l'ordre d'application des règles de réécriture, la réécriture termine toujours et la preuve obtenue, sans coupure, est unique, modulo certaines commutations de règles (c'est le théorème de normalisation forte, [Gir87]).

Il existe différents fragments de la logique linéaire obtenus par ajouts de contraintes sur les règles. Sauf mention contraire ces fragments satisfont la normalisation forte.

Une contrainte usuelle est de supprimer un groupe de règle. Par exemple, la *logique linéaire multiplicative-additive* (MALL) consiste en la logique linéaire privée des règles exponentielles.

La *logique linéaire intuitionniste* (ILL) est la logique linéaire exprimées dans un cadre bilatère, où les preuves obéissent à la contrainte supplémentaire que, dans chaque séquent, il y a au plus une formule à droite du signe $\vdash$.

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp}}\ \textit{axiome} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \textit{(coupure)} \text{ ou } \textit{(cut)}$$

Groupe additif

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\ (\textit{top})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B}\ (\textit{avec}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A_i \quad \text{où } i = 1 \text{ ou } 2}{\vdash \Gamma, A_1 \oplus A_2}\ (\textit{plus})$$

Groupe multiplicatif

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\ (\textit{bot}) \qquad \frac{}{\vdash 1}\ (\textit{un})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ (\textit{par}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ \textit{(tenseur)}$$

Groupe exponentiel

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \textit{(contraction)} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ \textit{(affaiblissement)}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \textit{(déréliction)} \qquad \frac{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, A}{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, !A}\ \textit{(promotion)}$$

TAB. 2.1 – Les règles de la logique linéaire

La *logique linéaire polarisée* (LL*pol*) est obtenue essentiellement en limitant le langage des formules pour ne former que des *formules polarisées*. Une formule polarisée est soit une *formule positive* (notation P, P',...), soit une *formule négative* (notation N, N', ...). Les règles de formation sont les suivantes :

$$N := \top \mid \bot \mid N \mathbin{\&} N' \mid N \mathbin{⅋} N' \mid ?P$$
$$P := 0 \mid 1 \mid N^{\bot} \mid P \oplus P' \mid P \otimes P' \mid !N.$$

Avec ces contraintes on a la propriété que toutes les règles sauf la règle *top*, préservent le fait qu'il y a au plus une formule positive dans chaque séquent. Cette propriété justifie que la règle *top* soit contrainte de manière à ce que sa conclusion ne contienne pas plus d'une formule positive. Les règles sont alors celles du tableau 2.0.2. Les notations $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ désignent des contextes ne contenant aucune formule positive et Γ est un contexte contenant au plus une formule positive.

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash N, N^{\bot}}\ (ax.) \qquad \frac{\vdash \Gamma, N \qquad \vdash \mathcal{N}, N^{\bot}}{\vdash \Gamma, \mathcal{N}}\ (cut)$$

Groupe additif

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\ (top)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, N \qquad \vdash \Gamma, N'}{\vdash \Gamma, A \& B}\ (avec) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, P_i \quad \text{où } i = 1 \text{ ou } 2}{\vdash \mathcal{N}, P_1 \oplus P_2}\ (plus)$$

Groupe multiplicatif

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot}\ (bot) \qquad \frac{}{\vdash 1}\ (un)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, N, N'}{\vdash \Gamma, N \mathbin{⅋} N'}\ (par) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}', P \qquad \vdash \mathcal{N}, P'}{\vdash \mathcal{N}, \mathcal{N}', P \otimes P'}\ (tens.)$$

Groupe exponentiel

$$\frac{\vdash \Gamma, ?P, ?P}{\vdash \Gamma, ?P}\ (cont.) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?P}\ (aff.)$$

$$\frac{\vdash \mathcal{N}, P}{\vdash \mathcal{N}, ?P}\ (der.) \qquad \frac{\vdash ?P_1, \ldots, ?P_n, N}{\vdash ?P_1, \ldots, ?P_n, !N}\ (prom.)$$

TAB. 2.2 – Les règles de LL*pol*

Il existe une autre *logique linéaire polarisée* à laquelle on fait référence par la notation LLP et qui diffère de celle-ci par son groupe exponentiel. Nous donnons ses règles exponentielles dans le tableau 2.0.2.

La *logique linéaire polarisée multiplicative-additive* est un sous-système de LLP sans règle affaiblissement et sans règle contraction. Les modalités exponentielles ! et ? ont alors comme seul rôle de permettre le changement de polarité. On change leur appellation : ! est notée $\downarrow$ et est appelée *décalage positif* et ? est notée $\uparrow$ et est appelée le *décalage négatif*. On donne le groupe de règles de MALLP qui remplace les règles exponentielles de LLP dans le tableau 2.0.2.

La logique linéaire polarisée a été principalement étudiée par O. Laurent ([Lau02a]).

$$\frac{\vdash \Gamma, N, N}{\vdash \Gamma, N}\ (\mathit{cont.}) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, N}\ (\mathit{aff.})$$

$$\frac{\vdash \mathcal{N}, P}{\vdash \mathcal{N}, ?P}\ (\mathit{der.}) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, N}{\vdash \mathcal{N}, !N}\ (\mathit{prom.})$$

TAB. 2.3 – groupe exponentiel de LLP

$$\frac{\vdash \mathcal{N}, P}{\vdash \mathcal{N}, \uparrow P}\ (\uparrow) \qquad \frac{\vdash \mathcal{N}, N}{\vdash \mathcal{N}, \downarrow N}\ (\downarrow)$$

TAB. 2.4 – groupe décalages de MALLP

2.0.3 Les sémantiques dénotationnelles

La normalisation forte de l'élimination des coupures fournit une relation d'équivalence entre preuves : deux preuves sont équivalentes si elles ont la même forme normale (*i.e.* sans coupure). Et la règle de coupure fournit un moyen de composer les preuves, compatible avec cette relation d'équivalence au sens où la forme normale de la composition de deux preuves ne dépend que de la forme normale de ces deux preuves. On retrouve la même situation dans le λ-calcul, pour les termes et la β-réduction, ou encore dans PCF.

La dénotation d'une preuve ou d'un terme est sa classe d'équivalence pour l'équivalence par réduction (élimination des coupures ou β-réduction) et elle est donnée par sa forme normale.

Une sémantique dénotationnelle est un cadre dans lequel les dénotations de preuves ou de termes sont représentées par des objets mathématiques d'une nature différente (parties d'un ensemble, cliques dans un graphe, arbres de mots, ...) que celle des preuves ou des termes et dans lequel une représentation de la composition des preuves ou des termes est aussi donnée. L'objet d'une sémantique dénotationnelle est de produire une distorsion du point de vue sur le calcul de manière à révéler une partie de ses propriétés. Il est donc plus juste de dire que la sémantique fournit un cadre d'interprétation plutôt qu'un cadre de représentation du calcul.

Une sémantique dénotationnelle est traditionnellement donnée par : une manière d'interpréter les formules ou les types ; une manière d'interpréter les preuves ou les termes et, en particulier, une manière d'interpréter la composition des preuves (coupure) ou des termes (application) ; et, enfin, une démonstration de ce que l'interprétation des preuves et des termes est stable par réduction (*i.e.* par élimination des coupures ou par β-réduction). Cette dernière propriété est dite de correction de la sémantique. Une sémantique peut fournir plusieurs options dans la manière de construire ces interprétations, nous parlons alors de modèle pour désigner les interprétations obtenue pour un choix particulier d'options.

Habituellement, une sémantique dénotationnelle est donnée dans un cadre catégorique : une catégorie est donnée, les formules ou les types sont interprétés par des objets, les preuves ou les termes sont interprétés par des morphismes et la composition est représentée par la composition dans la catégorie. De plus, il existe une axiomatisation catégorique de la correction d'un modèle pour différentes syntaxes. Ainsi un modèle catégorique de la Déduction Naturelle minimale (ou du λ-calcul, ou de PCF) est une catégorie cartésienne fermée et un modèle catégorique du fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste est une catégorie monoïdale close.

L'axiomatisation des modèles catégoriques de la logique linéaire est initialement due à Y. Lafont ([Laf88]) d'une part et à R. Seely d'autre part ([See89]). Ces axiomatiques diffèrent uniquement en ce qui concerne la modélisation des exponentielles. L'axiomatique de Lafont a le défaut de jeunesse d'être un peu limitative puisque certains modèles catégoriques de la logique linéaire ne la satisfont pas (le modèle ensembliste des espaces cohérents, par exemple). L'axiomatique de Seely est un peu plus distante de l'interprétation de la logique, et en quelque sorte moins intuitive, avec comme bénéfice qu'elle met concrètement en évidence le fait qu'un modèle catégorique de la logique linéaire intuitionniste fournit un modèle de la Déduction Naturelle (une catégorie cartésienne fermée). L'axiomatique de Seely a aussi un défaut de jeunesse, plus grave, celui de ne pas être suffisante pour la correction du modèle. Dans [Bie95], G. Biermann discute ce problème et il renforce notamment l'axiomatique de Seely pour obtenir la correction du modèle. Dans cette thèse nous adoptons l'axiomatique proposée par Biermann sous le nom de nouvelle catégorie de Seely. Pour le détail de la structure multiplicative-additive ainsi que pour l'adaptation aux modèles de la logique linéaire (pas seulement ILL), nous nous référons au livre *Domains and lambda-calculi* de R. Amadio et P.-L. Curien ([AC98]). Dans [s02a], P.-A. Melliès propose une autre axiomatique, dans la continuité de celle de Lafont mais moins restrictive, dont nous pensons qu'elle pourrait avantageusement remplacer celle des nouvelles catégories de Seely.

Sans entrer dans le détail, un modèle catégorique de LL est la donnée dans une catégorie $\mathcal{C}$ d'une structure $*$-autonome $(\&, \top, \otimes, 1, \multimap, \bot, (\_)^{\bot})$, que nous ne décrivons pas, et d'une structure exponentielle $(!, \dagger, \mathrm{aff}, \mathrm{cont}, \mathrm{der})$. Pour un modèle catégorique de ILL, une partie de la structure $*$-autonome n'est pas nécessaire. Dans la structure exponentielle ! est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, aff est une famille de morphismes $\mathrm{aff}_A : !A \to 1$, cont est une famille de morphismes $\mathrm{cont}_A : !A \to !A \otimes !A$ et der est une famille de morphismes $\mathrm{der}_A : !A \to A$, toutes trois indexées par les objets de $\mathcal{C}$. Ces trois familles sont utilisées pour interpréter respectivement l'affaiblissement, la contraction et la déréliction. La construction † est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{K}$ (la co-Kleisli de $\mathcal{C}$) dans $\mathcal{C}$. Cette catégorie $\mathcal{K}$ est une catégorie cartésienne fermée dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes de A dans B sont les morphismes de $!A$ dans B. Le foncteur † a un adjoint à droite U qui est un foncteur d'oubli (laissant les objets à l'identique et associant à un morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ le morphisme $\mathrm{der}_A \mathbin{⨾} f : A \to B$ de $\mathcal{C}$)[1] Ces deux foncteurs sont tels que $! = \dagger U$. Le foncteur † est donc une construction associant à chaque morphisme $f : !A \to B$ de $\mathcal{C}$ un morphisme $f^{\dagger} : !A \to !B$ de $\mathcal{C}$ et cette construction est en fait celle utilisée pour interpréter la promotion.

L'axiomatisation des modèles catégoriques de LLP, LL*pol* et MALLP est un travail en cours (notamment autour de la notion de catégorie de contrôle de P. Selinger et de catégorie faiblement distributive de R. Blute, R. Cockett, R. Seely et T. Trimble) dont une partie a déjà été accomplie par O. Laurent dans sa thèse. Comme LL*pol* est un sous-système de LL, un modèle de LL est *a fortiori* un modèle de LL*pol*. Et bien que MALLP ne soit ni un sous-système de MALL, ni un sous-système de LL, un modèle de MALL suffit à faire un modèle de MALLP en considérant que les décalages n'ont aucune action sur les formules ou sur les preuves. Lorsque nous ne pouvons pas nous ramener à un modèle de LL ou de MALL et à défaut d'une axiomatique éprouvée, nous montrons directement la correction de certains modèles de MALLP et LL*pol* que nous construisons dans cette thèse.

2.0.4 La sémantique relationnelle

Il n'est pas toujours nécessaire de se placer dans un cadre catégorique pour parler d'un modèle de la logique linéaire. Le modèle relationnel de la logique linéaire est notamment un modèle suffisamment simple pour qu'on puisse montrer sa correction en se passant de sa description catégorique standard dans la catégorie $\mathbf{Rel}$ des ensembles et des relations. Tous les modèles de la logique linéaire que nous considérons dans cette thèse utilisent des constructions similaires à celles du modèle relationnel. Le modèle relationnel joue ainsi plus ou moins le rôle d'ossature commune à tous nos modèles. Nous rappelons donc rapidement la sémantique relationnelle de la logique linéaire sans entrer dans le détail de sa description catégorique.

Formules. Une formule A est interprétée par un ensemble $|A|$ défini inductivement comme suite : $|0| = |\top| = \emptyset$, $|1| = |\bot| = \{*\}$, $|A^{\bot}| = |A|$, $|A \oplus B| = |A \& B| = |A| \cup |B|$

[1] la condition que rajoute Biermann à l'axiomatique de Seely est que ces deux foncteurs sont monoïdaux et que l'adjonction est elle-même monoïdale.

si$|A| \cap |B| \neq \emptyset$ ou $|A| + |B|$ autrement, $|A \otimes B| = |A \parr B| = |A| \times |B|$ et $|!A| = |?A| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|A|)$.

Contexte. On utilise le calcul des séquents en notation droite de la logique linéaire. À associativité et commutativité près du produit Cartésien des ensembles, on interprète sans difficulté la virgule des contextes par un *par*. On pose donc $|A_1, \ldots, A_n| = |A_1 \parr \ldots \parr A_n| = |A_1| \times \ldots \times |A_n|$.

Preuve. L'interprétation d'une preuve d'un séquent $\vdash \Gamma$ est un sous-ensemble de $|\Gamma|$ définie inductivement, par cas sur la dernière règle, comme dans la table 2.0.4. Pour les règles additives il faut penser à rendre, si nécessaire, les ensembles A et B disjoints avant application de la règle.

Groupe identité

$$\frac{}{\vdash A, A^\perp : \{(a,a) \mid a \in |A|\}} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Delta, A^\perp : g}{\vdash \Gamma, \Delta : \{(\gamma,\delta) \mid \exists a \in |A|, (\gamma,a) \in f \text{ et } (\delta,a) \in g\}}$$

Groupe additif

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top : \emptyset}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Gamma, B : g}{\vdash \Gamma, A \& B : f \cup g} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f}{\vdash \Gamma, A \oplus B : f}$$

Groupe multiplicatif

$$\frac{\vdash \Gamma : f}{\vdash \Gamma, \bot : f \times \{*_\bot\}} \qquad \frac{}{\vdash 1 : \{*_1\}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B : f}{\vdash \Gamma, A \parr B : f} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Delta, B : g}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B : \{(\gamma, \delta, (a,b)) \mid (\gamma,a) \in f, (\delta,b) \in g\}}$$

Groupe exponentiel

$$\frac{\vdash \Gamma, A : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, [a]) \mid (\gamma, a) \in f\}} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, x_1 + x_2) \mid (\gamma, x_1, x_2) \in f\}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, []) \mid (\gamma) \in f\}} \qquad \frac{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, A : f}{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, !A : f^\dagger}$$

$$\text{où} \quad f^\dagger = \{(\sum_{1 \leq j \leq k} x_1^j, \ldots, \sum_{1 \leq j \leq k} x_n^j, [a_1, \ldots, a_k]) \mid k \in \mathbb{N}, \forall j, (x_1^j, \ldots, x_n^j, a_j) \in f\}$$

TAB. 2.5 – Interprétation relationnelle des règles

Il est alors relativement facile de montrer la correction du modèle (la seule difficulté tient au nombre de cas à écrire pour la procédure d'élimination des coupures elle-même).

2.0.5 Collapse extensionnel

Soit un modèle dénotationnel du Calcul donné sous la forme d'une catégorie cartésienne fermée $(\mathcal{K}, \Rightarrow, \times, \top)$ contenant un certain nombre d'objets jouant le rôle de types de base. Le calcul considéré peut être, par exemple, le λ-calcul, PCF ou la Déduction Naturelle. Usuellement les types de bases sont le type des booléens et le type des entiers naturels.

L'idée du collapse extensionnel est de considérer les morphismes du modèle comme des fonctions agissant sur les types de bases ou sur d'autres fonctions (on parle alors de fonctionnelles).

Par fermeture cartésienne, tout morphisme x de $\mathcal{K}(A, B)$ peut être considéré comme un morphisme $\hat{x}$ de $\mathcal{K}(\top, C)$ où C est soit l'objet des morphismes de A dans B, $A \Rightarrow B$, soit simplement B si A est l'objet terminal $\top$ de la catégorie. On dit alors que $\hat{x}$ est un élément de C. Réciproquement un élément f de $A \Rightarrow B$ peut être considéré comme un morphisme de $\check{f}$ de $\mathcal{K}(A, B)$. Si x est un élément de C et si f est un élément de $C \rightarrow D$ on peut alors composer $\check{f}$ et x pour obtenir un élément $(x \fatsemi \check{f})\hat{}$ de D, noté $f(x)$. Ceci correspond à la notion d'application d'une fonction à un argument.

Contrairement aux fonctions, deux éléments f et g de $A \Rightarrow B$ peuvent très bien vérifier que $f(x) = g(x)$ pour tout élément x de A sans que f et g soient égaux. Autrement dit le modèle fait des différences entre morphismes qui ne sont pas opérationnelles. On introduit alors une relation d'équivalence partielle, appelée relation d'équivalence extensionnelle et qui jouera le rôle de l'égalité entre fonctions. Cette relation $\sim$ est définie entre éléments des objets du langage $A := \iota \mid A \Rightarrow B$ où les ι sont les types de bases. Sur les types de bases, la relation $\sim_\iota$ est juste l'égalité. La relation $\sim A \Rightarrow B$ est définie comme suit. Si f et g sont des éléments de $A \Rightarrow B$, alors

$$f \sim_{A \Rightarrow B} g \iff \forall x, y \in A, x \sim_A y \implies f(x) \sim_B g(y).$$

Un élément f de $A \Rightarrow B$ est dit extensionnel lorsque $f \sim_{A \Rightarrow B} f$. Si nécessaire, cette relation peut aussi être définie sur les types produits $A \times B$.

Pour les calculs qui nous intéresse, (le λ-calcul, PCF ou la Déduction Naturelle) la notion d'application du modèle coïncide avec la notion d'application syntaxique (l'application du λ-calcul ou le *modus ponens*). Par correction on a alors que toute interprétation de terme ou de preuve est extensionnelle. Le quotient (partiel) du modèle catégorique par la relation d'extensionnalité est alors encore un modèle dénotationnel du calcul. Ce quotient est appelé le collapse extensionnel du modèle.

Dans cette thèse, nous considérerons de tels collapses extensionnels de modèles, dans le cadre particulier ou la catégorie $\mathcal{K}$ est obtenue à partir d'un modèle catégorique $\mathcal{C}$ de ILL (comme *co*-construction de Kleisli associée à la catégorie $\mathcal{C}$). Nous serons aussi amenés à comparer les collapses extensionnels définis par différents modèles catégoriques de ILL.

Dans [s02b] P.-A. Melliès définit un critère catégorique suffisant pour que deux modèles catégoriques de ILL définissent le même collapse extensionnel. Nous utilisons ce critère uniquement dans le cadre où les deux modèles de ILL sont données dans la même catégorie et ne différent que par la structure qu'elles associent aux exponentielles. Ce cadre restreint correspond en fait à une version antérieure et non publiée du critère de Melliès et qui peut désormais être considérée comme un cas particulier d'application du résultat établit dans [s02b]. Nous rappelons le critère de Melliès dans ce cas particulier.

Soit une catégorie $\mathcal{C}$ équipée de deux structures exponentielles, $(\underset{1}{!}, \dagger_1, \mathrm{aff}_1, \mathrm{cont}_1, \mathrm{der}_1)$ et $(\underset{2}{!}, \dagger_2, \mathrm{aff}_2, \mathrm{cont}_2, \mathrm{der}_2)$, telle que $\mathcal{C}$ soit un modèle catégorique de ILL pour chacune des deux structures exponentielles et pour une même structure multiplicative additive $(1, \top, \&, \otimes)$. Nous supposons de plus que $\mathcal{C}$ est donnée avec un ensemble de types de bases ι. Soient TopUn_1 l'isomorphisme $\underset{1}{!}\top \cong 1$ du premier modèle et TopUn_2 l'isomorphisme $\underset{2}{!}\top \cong 1$ du second modèle.

Théorème 2.1 ([s02b]). *S'il existe une famille $(\theta_A)_{A \in C}$ de morphismes $\theta_A : \underset{1}{!} A \rightarrow \underset{2}{!} A$ de $\mathcal{C}$ et une famille $(\zeta_A)_{A \in C}$ de morphismes $\zeta_A : \underset{2}{!} A \rightarrow \underset{1}{!} A$ de $\mathcal{C}$ telles que, pour tout objet $A \in C$:*

– *les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{1}{!}\top \arrow[dd, "\theta_\top"] \\
1 \arrow[ur, "\mathrm{TopUn}_1^{\dagger_1}"] \arrow[dr, "\mathrm{TopUn}_2^{\dagger_2}"'] & \\
 & \underset{2}{!}\top
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\underset{1}{!}A \arrow[dd, "\theta_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{der}_{1,A}"] & \\
 & A \\
\underset{2}{!}A \arrow[ur, "\mathrm{der}_{2,A}"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
 & \underset{1}{!}\top \\
1 \arrow[ur, "\mathrm{TopUn}_1^{\dagger_1}"] \arrow[dr, "\mathrm{TopUn}_2^{\dagger_2}"'] & \\
 & \underset{2}{!}\top \arrow[uu, "\zeta_\top"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\underset{1}{!}A \arrow[dr, "\mathrm{der}_{1,A}"] & \\
 & A \\
\underset{2}{!}A \arrow[uu, "\zeta_A"] \arrow[ur, "\mathrm{der}_{2,A}"'] &
\end{tikzcd}$$

– *si* $f : \underset{1}{!}\top \to A$ *et* $g : \underset{2}{!}\top \to A$ *sont deux morphismes de* $\mathcal{C}$ *tels que* $\theta_\top \mathbin{;} g = f$ *alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\underset{1}{!}\top \arrow[r, "f^{\dagger_1}"] \arrow[d, "\theta_\top"] & \underset{1}{!}A \arrow[d, "\theta_A"] \\
\underset{2}{!}\top \arrow[r, "f^{\dagger_2}"'] & \underset{2}{!}A
\end{tikzcd}$$

– *si* $f : \underset{1}{!}\top \to A$ *et* $g : \underset{2}{!}\top \to A$ *sont deux morphismes de* $\mathcal{C}$ *tels que* $\zeta_\top \mathbin{;} f = g$ *alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\underset{1}{!}\top \arrow[r, "f^{\dagger_1}"] & \underset{1}{!}A \\
\underset{2}{!}\top \arrow[u, "\zeta_\top"] \arrow[r, "f^{\dagger_2}"'] & \underset{2}{!}A \arrow[u, "\zeta_A"']
\end{tikzcd}$$

Alors les deux modèles $(\mathcal{C}, \underset{1}{!})$ *et* $(\mathcal{C}, \underset{2}{!})$ *de* ILL *définissent le même collapse extensionnel.*

Dans les applications que nous ferons de ce théorème nous ne préciserons pas les types de bases.

Première partie

Du statique au dynamique : retrouver le temps

CHAPITRE 3

Déploiement d'hypercohérences

3.1 Structure de jeux des hypercohérences

Nous voulons associer à chaque hypercohérence une *structure de jeu*, autrement dit un arbre muni d'une notion de polarité (à deux valeurs) tel que les étiquettes successives sur une branche alternent en polarité. Or une polarité naturelle dans les hypercohérences est la valeur de cohérence d'un ensemble de points lorsque cet ensemble est fini et non vide. Si ce n'est pas un singleton, un tel ensemble est soit cohérent soit incohérent. On peut alors faire coïncider la polarité de cohérence avec la polarité des jeux. C'est effectivement cette intuition simple que nous suivrons dans ce chapitre. Ainsi les coups dans la structure de jeu seront des sous-ensembles de la trame et la polarité *Joueur* ou *Opposant* d'un coup sera donnée par sa valeur de cohérence. À cohérent nous ferons correspondre *Joueur* et à incohérent *Opposant*.[1]

Avant de définir la manière dont on associe une structure de jeu à chaque espace et d'en étudier les propriétés sémantiques nous allons *apprêter* un petit peu nos hypercohérences. Essentiellement nous souhaitons faire une étude la plus générale possible et pour cela nous devons avoir accès à une valeur de cohérence pour des ensembles *infinis* de points de la trame. En se contentant de la valeur de cohérence pour des ensembles finis de points de la trame nous serions cantonné à ne considérer pour nos structures de jeux que des hypercohérences finies. Nous introduisons donc une généralisation des valeurs de cohérence : l'infinie cohérence.

3.1.1 Infinie cohérence

Définition 3.1. Soit X une hypercohérence. Un sous-ensemble non vide x de points de la trame de X est dit *infiniment cohérent* dans X lorsque :

$$\forall u \subseteq_{\text{fin}} x, \exists v \in \Gamma(X), u \subseteq v \subseteq x.$$

L'ensemble des sous-ensembles infiniment cohérent de la trame de X est noté $\Delta(X)$. Un sous-ensemble *infiniment incohérent* dans X est un élément de $\Delta(X^{\perp})$. Un ensemble infiniment cohérent (resp. incohérent) est dit strictement infiniment cohérent (resp. strictement infiniment incohérent) lorsqu'il n'est pas réduit à un singleton. On note $\Delta^*(X)$ (resp. $\Delta^*(X^{\perp})$) l'ensemble des parties de la trame de X strictement infiniment cohérentes (resp. strictement infiniment cohérentes).

[1]Dans cette thèse, pour signifier qu'un coup ou qu'une partie dans un jeu sont de la polarité du *Joueur* ou de la polarité de l'*Opposant* nous emploierons les mots *joueur* et *opposant* comme s'il s'agissait d'adjectifs (invariables). Ainsi « coup joueur » signifie ici coup de la polarité du *Joueur*.

Remarques 3.2. Une notion très naturelle de sous-espace existe pour les hypercohérences : si X est une hypercohérence et si E est un sous-ensemble de la trame de X alors le sous-espace induit par X sur E est l'hypercohérence de trame E et de cohérence

$$\Gamma_X(E) = \Gamma(X) \cap \mathcal{P}_{\text{fin}}(E).$$

L'infinie cohérence est clairement compatible avec cette notion de sous-espace puisque

$$\Delta((E, \Gamma_X(E)) = \Delta(X) \cap \mathcal{P}^*(E).$$

La cohérence infinie $\Delta(X)$ est en fait égale à l'ensemble de toutes les unions filtrantes non vides d'éléments de $\Gamma(X)$, *i.e.*

$$x \in \Delta(X) \iff \exists D \subseteq^* \Gamma(X), (\forall u, v \in D, \exists w \in D, u \cup v \subseteq w) \text{ et } \cup D = x. \qquad (3.1)$$

Démonstration. Soit un élément x de $\Delta(X)$. Pour chaque sous-ensemble fini u de x, il existe un sous-ensemble fini non vide v_u de x qui contient u et qui est un élément de $\Gamma(X)$. Posons $D = \{v_u \mid u \subseteq_{\text{fin}} x\}$. Alors D est une partie filtrante non vide de $\Gamma(X)$ (car pour chaque paire d'éléments v_u, $v_{u'}$ de D, $v_{v_u \cup v_{u'}}$ est un élément de D) et $\cup D = x$. Réciproquement si D est une partie filtrante de $\Gamma(X)$ alors, pour chaque sous-ensemble fini u de $\cup D$, il existe un sous-ensemble fini V de D tel que $u \subseteq \cup V$ et il existe un élément w de D tel que $\cup V \subseteq w$, donc $u \subseteq w \subseteq D$ et $w \in \Gamma(X)$. Ceci prouve bien que $\cup D \in \Delta(X)$. □

Les hypercohérences qui nous intéressent viennent de la sémantique. À ce titre, bien qu'elles puissent être de trame infinie, elles vérifient une condition de cardinalité très utile pour l'étude de la cohérence infinie. En l'absence du second ordre toutes les hypercohérences de la sémantique (de la logique linéaire ou d'un calcul simplement typé avec comme types de bases les entiers ou les booléens) sont localement finies. Pour une preuve de ce résultat on se reportera à la section *'A cardinality issue'* de [Ehr00]. Nous rappelons simplement la définition de la finitude locale.

Définition 3.3. Soit une hypercohérence X et soit $a \in |X|$. On note $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(|X|)$ l'ensemble des parties finies de $|X|$ qui contiennent a. Soit alors $\approx_X$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(|X|)$ définie par

$$u \approx_X u' \text{ ssi } \forall v \in \mathcal{P}^a_{\text{fin}}(|X|), u \cup v \in \Gamma(X) \iff u' \cup v \in \Gamma(X).$$

Le nombre de classes d'équivalences pour cette relation est appelé le *degré réduit* de a. L'hypercohérence X est dite localement finie lorsque ce degré réduit est fini pour tout élément de $|X|$.

Remarques 3.4. Toute hypercohérence finie est localement finie. Par ailleurs, la finitude locale est préservée par sous-espaces. Autrement dit, si X est une hypercohérence localement finie et si $E \subseteq |X|$ alors $(E, \Gamma_X(E))$ est localement finie.

Dans les cas d'hypercohérences localement finies, la cohérence infinie se comporte, bon gré mal gré, comme la cohérence. Pour établir quelques uns des résultats mettant en évidence cela le lemme suivant est fort utile.

Lemme 3.5. *Si X est une hypercohérence localement finie alors toute suite sur $\mathcal{P}^*_{\text{fin}}(|X|)$ qui est strictement croissante pour l'inclusion et qui alterne les éléments de $\Gamma(X)$ et de $\Gamma^\perp(X)$ est de longueur finie.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une telle suite $S = (S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de longueur infinie. Le premier élément de S contient au moins un point de la trame de X. Appelons le a. Par croissance de S, tous ses termes sont des éléments de $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(|X|)$. Par alternance, la suite S contient une infinité d'éléments strictement cohérents (et aussi une infinité d'éléments strictement incohérents). Pour chaque paire (s_i, s_j) d'éléments strictement cohérents distincts ($i \neq j$) il existe un élément s' de S qui vérifie $s_{\min(i,j)} \subsetneq s' \subsetneq s_{\max(i,j)}$. Ainsi pour chacune de des paires (s_i, s_j), il existe un s' tel que $s_{\min(i,j)} \cup s'$ est strictement incohérent car égal à s' et $s_{\max(i,j)} \cup s'$ est strictement cohérent car égal à $s_{\max(i,j)}$. Donc $s_i \not\approx_X s_j$. Ainsi S contient une liste infinie d'éléments de $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(|X|)$ dont les classes d'équivalence pour $\approx_X$ sont distinctes deux à deux. C'est en contradiction avec la finitude du degré réduit de a et donc en contradiction avec la finitude locale de X, ce qui conclut. □

Proposition 3.6 (caractérisation de la cohérence infinie). *Si X est une hypercohérence localement finie alors un sous-ensemble non vide x de la trame de X est infiniment cohérent si et seulement si :*

$$\forall a \in x, \exists v \in \Gamma(X), a \in v \subseteq x \textit{ et } \forall w \subseteq_{\text{fin}} x, v \subseteq w \Rightarrow w \in \Gamma(X).$$

ou de manière équivalente si et seulement si

$$\forall u \subseteq_{\text{fin}} x, \exists v \in \Gamma(X), u \subseteq v \subseteq x \textit{ et } \forall w \subseteq_{\text{fin}} x, v \subseteq w \Rightarrow w \in \Gamma(X).$$

Démonstration. L'équivalence entre les deux propriétés énoncées dans la proposition est triviale. La seconde est clairement plus forte que la première et la première implique la seconde : il suffit de choisir un élément a de u, d'obtenir ainsi un v comme dans la première propriété et de choisir $v \cup u$ pour le v de la seconde. On prouve le résultat (l'équivalence avec la définition de la cohérence infinie) pour la première version de la caractérisation. La propriété de la proposition implique la propriété de la définition. La seule chose à vérifier est donc l'implication réciproque. Si x est un singleton les deux propriétés sont triviales et toujours vérifiées. On peut donc supposer que x contient au moins deux éléments b et c.

Supposons qu'il existe un élément x de $\Delta(X)$ qui ne vérifie pas la caractérisation. Alors il existe un a dans $|X|$ tel que pour chaque v, si $a \in v \subseteq_{\text{fin}} x$ alors il existe un élément $o(v)$ de $\Gamma^\perp(X)$ tel que $v \subseteq o(v) \subseteq_{\text{fin}} x$. De plus, lorsque v n'est pas un singleton, $o(v)$ est strictement plus grand que v. Mais comme x est infiniment cohérent on a aussi que pour chaque u, si $u \subseteq^*_{\text{fin}} x$ alors il existe un élément $e(u)$ de $\Gamma(X)$ tel que $u \subseteq e(u) \subseteq_{\text{fin}} x$ et lorsque u n'est pas un singleton, $e(u)$ est strictement plus grand que u.

Ainsi en posant : $u_0 = e(\{a, b, c\})$, $u_{i+1} = e(u_i)$, pour chaque entier naturel pair i, et $u_{i+1} = o(u_i)$, pour chaque entier naturel impair i, on construit une suite strictement croissante $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ alternant les éléments de $\Gamma(X)$ et de $\Gamma^\perp(X)$. Par le lemme 3.5, on a une contradiction avec la finitude locale. Ceci conclut la preuve que la caractérisation est correcte. □

Propriétés générales

Propriétés:

3.7. *La cohérence infinie est compatible avec la cohérence*

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \cap \Delta(X) = \Gamma(X) \quad (\textit{et donc } \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \cap \Delta(X^\perp) = \Gamma^\perp(X)).$$

3.8. *Si X est localement finie alors la cohérence infinie* sépare *X, c'est à dire que :*

(a) seuls les singletons sont à la fois infiniment cohérent et infiniment incohérent, i.e.

$$\Delta(X^\perp) \cap \Delta(X) = \{\{a\}/a \in |X|\}.$$

(b) tout sous-ensemble de la trame de X est infiniment cohérent ou infiniment incohérent, i.e.

$$\Delta(X) \cup \Delta(X^\perp) = \mathcal{P}^*(X).$$

3.9. *Si X est parallèle alors*

$$\forall I \subseteq^* \mathbb{N}, ((\forall i \in I, x_i \in \Delta(X)) \wedge \cap_{i \in I} x_i \neq \emptyset) \Rightarrow \cup_{i \in I} x_i \in \Delta(X)$$

(et par passage à l'orthogonal on a la même propriété pour l'infinie incohérence dans une hypercohérence série).

Démonstration de la propriété 7. Si x est un élément de $\Gamma(X)$ alors x est aussi un élément de $\Delta(X)$ (pour chaque sous-ensemble u de x on a $u \subseteq x \subseteq_{\text{fin}} x$ et $x \in \Gamma(X)$). Soit maintenant x un sous-ensemble fini de $|X|$ infiniment cohérent. Alors pour chaque sous-ensemble fini u de x, en particulier pour x lui-même, il existe un élément v de $\Gamma(X)$ tel que $u \subseteq v \subseteq_{\text{fin}} x$. Lorsque u égale x, v égale x aussi donc $x \in \Gamma(X)$. □

Démonstration de la propriété 8a. La propriété précédemment prouvée assure que tous les singletons sont à la fois infiniment cohérent et infiniment incohérent.

Soit maintenant x un sous-ensemble non vide de $|X|$ non réduit à un singleton et supposons que $x \in \Delta(X) \cap \Delta(X^\perp)$. On va alors obtenir une suite infinie contredisant la finitude locale de X grâce au lemme 3.5.

Soient a et b deux éléments distincts de x alors il existe un sous-ensemble u_0 de x strictement cohérent et contenant a et b. De plus si u_i est un sous-ensemble fini de x strictement incohérent alors il existe un u_{i+1} strictement cohérent et tel que $u_i \subseteq u_{i+1} \subseteq x$ et si u_i est un sous-ensemble fini de x strictement cohérent alors il existe un u_{i+1} strictement incohérent et tel que $u_i \subseteq u_{i+1} \subseteq x$. Ceci garantie l'existence d'une suite infinie $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ strictement croissante et dont les éléments alternent entre stricte cohérence et stricte incohérence. D'où la contradiction. □

Démonstration de la propriété 8b. Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide x de $|X|$ qui n'est ni infiniment cohérent ni infiniment incohérent. Comme X est localement finie on peut utiliser la caractérisation de l'infinie cohérence de la proposition 3.6 et en déduire que x vérifie :

$$\exists a \in x, \forall u_i \in \Gamma(X), (a \in u_i \subseteq_{\text{fin}} x \Rightarrow \exists u_{i+1} \in \Gamma^{*\perp}(X), u_i \subset u_{i+1} \subseteq x)$$
$$\exists b \in x, \forall u_i \in \Gamma^\perp(X), (b \in u_i \subseteq_{\text{fin}} x \Rightarrow \exists u_{i+1} \in \Gamma^*(X), u_i \subset u_{i+1} \subseteq x).$$

En choisissant u_0 égal à $\{a, b\}$ on obtient alors une suite infinie contredisant la finitude locale par le lemme 3.5. □

Démonstration de la propriété 9. Si I est un singleton il n'y a rien à prouver. On commence par prouver la propriété pour $I = \{1, 2\}$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\Delta(X)$, d'intersection non vide. Soit a un élément de $x_1 \cap x_2$. Et soit u un sous-ensemble fini non vide de $x_1 \cup x_2$. Il faut prouver qu'il existe un sous-ensemble cohérent de $x_1 \cup x_2$ qui contient u. Or, par cohérence de x_1, il existe un sous-ensemble cohérent v_1 de x_1 qui contient le sous-ensemble fini $(u \cap x_1) \cup \{a\}$ de x_1. De même il existe un sous-ensemble fini cohérent v_2 de x_2 et qui contient $(u \cap x_2) \cup \{a\}$. Par parallélisme de X et comme v_1 et v_2 s'intersectent, $v = v_1 \cup v_2$ est cohérent. De plus $u \subseteq v \subseteq x_1 \cup x_2$. La propriété pour $I = \{1, 2\}$ est donc prouvée. Son extension à tout I fini non vide est alors immédiate. Reste le cas où I n'est pas un ensemble fini. Ce cas se ramène au cas fini. En effet, soit u une partie finie de $\cup_{i \in I} x_i$. Alors il existe une famille finie $(x_i)_{i \in J}$ extraite de la famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que u est encore un sous-ensemble fini de $\cup_{i \in J} x_i$. On en déduit l'existence d'un sous-ensemble cohérent v de $\cup_{i \in J} x_i$ qui contient u. Mais *a fortiori* v est un sous-ensemble de $\cup_{i \in I} x_i$. C'est donc que $\cup_{i \in I} x_i$ est infiniment cohérent. □

Propriétés logiques

Définition 3.10 (généralisation additive). Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable. Les hypercohérences $\&_{i\in I} X_i$ et $\oplus_{i\in I} X_i$ ont pour trame $\sum_{i\in I} |X_i|$ et pour relations de cohérence

$$\Gamma(\&_{i\in I} X_i) = \{u \subseteq^*_{\text{fin}} \sum_{i\in I} |X_i| | \forall i \in I, (u \subseteq |X_i| \Rightarrow u \in \Gamma(X_i))\}$$
$$\Gamma(\oplus_{i\in I} X_i) = \{u \subseteq^*_{\text{fin}} \sum_{i\in I} |X_i| | \exists j \in I, u \in \Gamma(X_j)\}.$$

Cette définition généralise les constructions additives binaires $\&$ et $\oplus$.

Propriétés (logiques): *Soient X, X_1 et X_2 trois hypercohérences et soit $(X_i)_{i\in I}$ un famille finie ou dénombrable d'hypercohérences. Alors :*

3.11. $\forall x \subseteq^* \sum_{i\in I} |X_i|, x \in \Delta(\&_{i\in I} X_i) \Leftrightarrow \forall i \in I, (x \subseteq_{\text{fin}} |X_i| \Rightarrow x \in \Delta(X_i))$

3.12. $\forall x \subseteq^* \sum_{i\in I} |X_i|, x \in \Delta(\oplus_{i\in I} X_i) \Leftrightarrow \exists j, x \in \Delta(X_j)$

3.13. *si X_1 et X_2 sont localement finies alors*

$$\forall x \subseteq^* |X_1| \times |X_2|, x \in \Delta(X_1 \otimes X_2) \Leftrightarrow \pi_1(x) \in \Delta(X_1) \textit{ et } \pi_2(x) \in \Delta(X_2)$$

(et la propriété respective pour le $\parr$).

3.14. *Si X est localement finie et* série *alors*

$$\forall x \subseteq |!X|, x \in \Delta(!X) \Leftrightarrow \forall w \triangleleft x, w \in \Delta(X)$$

(et la propriété respective pour le "pourquoi pas" lorsque X est localement finie et parallèle).

Preuve de la propriété 11. Si un sous-ensemble non vide x de $\sum_{i\in I} X_i$ est entièrement inclus dans l'un des $|X_i|$ alors il y a équivalence entre $x \in \Delta(X)$ et $x \in \Delta(X_i)$. Ainsi la seule chose à prouver est que si $x \cap |X_i| \neq \emptyset$ et $x \cap |X_j| \neq \emptyset$ pour i et j deux indices distincts de I alors x est infiniment cohérent dans $\&_{i\in I} X_i$. Un tel x contient au moins un élément de $|X_i|$, disons a, et un élément de $|X_j|$, disons b. Soit maintenant u un sous-ensemble fini de x. L'ensemble $u \cup \{a, b\}$ est fini, non vide et il n'est contenu dans aucun des $|X_i|$. C'est donc un ensemble cohérent qui contient u et est contenu dans x. Ce qui conclut. □

Preuve de la propriété 12. Comme pour la propriété précédente, la seule chose à prouver concerne un x qui intersecte au moins deux $|X_i|$. Disons $a \in x \cap |X_i|$ et $b \in x \cap |X_j|$. Il faut montrer qu'un tel x n'est pas infiniment cohérent. Pour cela il suffit de considérer le sous-ensemble $\{a, b\}$ de x : il est clair que pour tout v qui contient $\{a, b\}$, v est strictement incohérent. Ainsi un tel x ne peut pas être infiniment cohérent. □

Preuve de la propriété 13. Soit x un sous-ensemble non vide de $|X|$. Supposons que x est infiniment cohérent dans $X_1 \otimes X_2$ et soit u_1 un sous-ensemble fini non vide de $\pi_1(x)$. Alors il existe un sous ensemble fini u de x tel que $u_1 \subseteq \pi_1(u)$. Comme u est un sous-ensemble fini de x, il existe un sous-ensemble cohérent v de x qui contient u. Le sous-ensemble $\pi_1(v)$ de $\pi_1(x)$ est cohérent dans X_1, de plus $u_1 \subseteq \pi_1(u) \subseteq \pi_1(v)$. Ceci conclut à l'infinie cohérence de $\pi_1(x)$. L'infinie cohérence de $\pi_2(x)$ dans X_2 s'obtient de même.

Maintenant supposons que $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ sont tous deux infiniment cohérents et soit u un sous-ensemble fini de x. Il existe un $v_1 \subseteq_{\text{fin}} \pi_1(x)$ et un $v_2 \subseteq_{\text{fin}} \pi_2(x)$ tels que

$$\pi_1(u) \subseteq v_1 \text{ et } \forall w_1 (\pi_1(u) \subseteq w_1 \subseteq_{\text{fin}} \pi_1(x) \implies w_1 \in \Gamma(X_1))$$
$$\pi_2(u) \subseteq v_2 \text{ et } \forall w_2 (\pi_2(u) \subseteq w_2 \subseteq_{\text{fin}} \pi_2(x) \implies w_2 \in \Gamma(X_2)).$$

Mais il existe un sous-ensemble fini v' de x tel que $v_1 \subseteq \pi_1(v')$ et il existe aussi un sous-ensemble fini v'' de x tel que $v_2 \subseteq \pi_1(v'')$. Ainsi $u \cup v' \cup v''$ est un sous-ensemble fini de x

contenant u et que nous noterons w. Comme $v_1 \subseteq \pi_1(w) \subseteq \pi_1(x)$ on a que $\pi_1(w)$ est cohérent dans X_1 et comme $v_2 \subseteq \pi_2(w) \subseteq \pi_2(x)$, $\pi_2(w)$ est cohérent dans X_2. Donc, finalement w est cohérent dans $X_1 \otimes X_2$. Ce qui achève bien la preuve de la propriété pour le tenseur.

On a facilement la propriété respective pour le *par* : rappelons juste que lorsque X_1 et X_2 sont tous deux localement finis alors $X_1 \parr X_2$ est encore localement fini ([Ehr00]), ce qui permet de conclure en utilisant la bonne dualité de l'infinie cohérence dans le cas localement fini. □

Preuve de la propriété 14. Soit x un sous-ensemble non vide de $|!X|$ tel que chacune de ses sections soit infiniment cohérente dans X. Nous devons prouver que $x \in \Delta(!X)$. Autrement dit, étant donné U un sous-ensemble fini non vide de x, nous devons exhiber un sous-ensemble V cohérent de $!X$ tel que $U \subseteq V \subseteq_{\text{fin}} x$.

Supposons la propriété suivante vraie :

$$\exists r \lhd U, \forall S \subseteq_{\text{fin}} x, \exists t(S) \in {\Gamma^*}^{\perp}(X), r \subseteq t(S) \subseteq \cup x \text{ et } t(S) \cap (\cup(U \cup S)) \lhd (U \cup S)$$

Pour chaque $S \subseteq_{\text{fin}} x$ on se donne un tel $t(S)$. Considérons $s = \cup_{S \subseteq_{\text{fin}} x} t(S)$. Clairement, s est un sous-ensemble non vide de $\cup x$ qui intersecte chacun des éléments de x. C'est donc une section de x. Nous allons exhiber une contradiction en montrant que s est en fait une section strictement infiniment incohérente de x. Soit u un sous-ensemble fini non vide de s et soit V un sous-ensemble fini de x tel que $u \subseteq \cup V$. Choisissons maintenant un $t(y)$ pour chaque $y \in V$. Comme chacun de ces $t(y)$ contient u et est strictement infiniment incohérent dans X, on peut conclure par sérialité de X que leur union $\cup_{y \in V} t(y)$ est strictement incohérente. Ceci prouve que s est strictement infiniment incohérent dans X ce qui contredit notre hypothèse.

La propriété précédemment supposée vraie est donc fausse, on a donc :

$$\forall r \lhd U, \exists S \subseteq_{\text{fin}} x, \forall t \in {\Gamma^*}^{\perp}(X), r \subseteq t \subseteq \cup x \implies t \cap (\cup(U \cup S)) \ntriangleleft (U \cup S)$$

Comme l'ensemble U est fini, l'ensemble $\{r \mid r \lhd U\}$ est aussi fini. Pour chacun des éléments r de cet ensemble, choisissons un S comme dans la propriété précédente, que nous noterons S_r. On obtient que $\cup_{r \lhd U} S_r$ est un sous-ensemble fini de x. Donc finalement $U \cup (\cup_{r \lhd U} S_r)$, que nous noterons V, est un sous-ensemble fini de x. Soit maintenant une section t de V. L'ensemble t est fini et non vide et est contenu dans $\cup x$. Soit r égal à $t \cap (\cup U)$. L'ensemble r est une section de U et $t \cap (\cup(U \cup S_r))$ est une section de $(U \cup S_r)$ qui contient r. Donc t est cohérent dans X. Ainsi V est cohérent dans $!X$. Ceci achève de prouver que x est infiniment cohérent dans $!X$.

Il reste à prouver l'implication de la gauche vers la droite. Les constructions logiques, en particulier !, conservent la finitude locale. Nous pouvons donc utiliser la propriété 8 pour $!X$. Ainsi il suffit de prouver que, si x est un sous-ensemble de $\mathrm{Cl}_{\text{fin}}(X)$ qui admet une section w strictement infiniment incohérente, alors x est strictement infiniment incohérent dans $!X$. Soit U un sous-ensemble fini de x. Nous devons exhiber un sous-ensemble strictement infiniment incohérent V contenant U et inclus dans x. Comme U est un ensemble fini d'ensembles finis la réunion de ses éléments $\cup U$ est finie et $w \cap (\cup U)$ est un sous-ensemble fini de w. Comme w est strictement infiniment incohérent il contient au moins deux éléments distincts, disons a_1 et a_2 et l'ensemble $w \cap (\cup U) \cup \{a_1, a_2\}$, que nous noterons u, est un sous-ensemble fini non vide de w. Donc il existe un sous-ensemble incohérent v de X tel que $u \subseteq v \subseteq w$. Et comme a_1 et a_2 appartiennent à v, v est strictement incohérent dans X. Comme v est un sous-ensemble de w, pour chaque élément a de v il existe au moins un élément y de x tel que $a \in y$. On se donne pour chaque élément a de v un tel y noté y_a. Soit V l'ensemble égal à $U \cup \{y_a / a \in v\}$. Pour chaque élément a de v il existe un élément y de V tel que a est un élément de V et pour chaque élément y_a, l'élément a de v est tel que $a \in y_a$. De plus, w étant une section de x, pour chaque élément y de U il existe un élément a de w tel que $a \in y$, et cet élément a est encore un élément de $w \cap (\cup U)$, donc de u. Conséquemment v est une section de V ce qui fait de V un sous-ensemble strictement incohérent de $!X$. Ce qui achève la preuve.

En utilisant à nouveau la conservation logique de la finitude locale on en déduit que le *pourquoi pas* possède la propriété duale, en tenant bien compte du fait que la dualité échange le parallélisme et la sérialité. □

Proposition 3.15 (Décomposition série). *Si X est une hypercohérence série, si E est un sous-ensemble non vide de $|X|$ et si e est un élément de E alors : il existe un unique sous-ensemble de E, infiniment incohérent dans X, qui contient e et qui est maximal pour l'inclusion. On note $\downarrow (E, e)$ ce sous-ensemble. En conséquent tous les sous-ensemble infiniment incohérent maximaux de E sont disjoints et il existe un unique ensemble d'hypercohérences $\{Y_i \mid i \in I\}$ appelée décomposition série du sous-espace E de X et qui vérifie*

$$(E, \Gamma_X(E)) = \&_{i \in I} Y_i.$$

Pour un sous-espace E d'une hypercohérence parallèle on a la décomposition de E en un $\oplus$ généralisé d'hypercohérences de trame les sous-ensembles infiniment cohérents maximaux de E.

Démonstration. Soient u et v deux sous-ensembles infiniment incohérents de E contenant e et maximaux pour l'inclusion. Comme ils s'intersectent, par sérialité étendue à l'infinie cohérence (propriété 9), leur union est encore infiniment incohérente. Par maximalité ils sont donc égaux. La décomposition série $\{Y_i \mid i \in I\}$ de E est obtenue en prenant l'ensemble des sous-espaces de X généré par l'ensemble de tous les sous-ensembles infiniment incohérents maximaux de E. Son unicité est conséquence directe de l'unicité de ce dernier ensemble. □

3.1.2 Le déploiement en tours

Nous généralisons ici le déploiement en tours des hypercohérences finies séries, défini par T. Ehrhard dans [Ehr00], aux hypercohérences localement finies.

Une tour sera une suite finie de partie de la trame alternant entre parties infiniment cohérentes et parties infiniment incohérentes. Nous la verrons donc tout naturellement comme une partie dans un jeu à deux joueurs. En considérant toutes les tours sur une hypercohérence nous obtiendrons une structure de jeu.

Définition 3.16 (Relation d'habilitation). Soit une hypercohérence localement finie X. On définit une relation binaire "$\vdash_X$" sur $\mathcal{P}^*(|X|)$ en posant $x \vdash_X y$ lorsque :

- $y \subsetneq x$;
- si x est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent dans X alors y est un sous-ensemble infiniment cohérent de x maximal pour l'inclusion dans x ;
- et si x est strictement infiniment cohérent dans X alors y est un sous-ensemble infiniment incohérent de x maximal pour l'inclusion dans x.

Lorsque $x \vdash_X y$ on dit que x *habilite* y dans X ou que y est *habilité* par x. On note $S(x)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}^*(|X|)$ habilités par x dans X.

Remarque 3.17. L'ensemble $S(x)$ est vide seulement si x est un singleton.

Définition 3.18 (coups, parties et tours).

- Une *partie* sur X est une suite non vide $S = \langle x_{i_0} \dots x_n \rangle$ telle que $x_{i_0} = |X|$ et telle que si $i_0 \leq i < n$ alors $x_i \vdash_X x_{i+1}$. Avec la convention que $i_0 = 0$ si $|X| \in \Delta(X)$ et $i_0 = 1$ si $|X| \in \Delta^{*\perp}(X)$.
- Une *tour* sur X est une partie finie S sur X dont le dernier élément est un singleton. Le *pied* d'une tour S sur X, noté $p(S)$, est l'unique élément de son dernier élément.
- On appelle *coups* sur X les sous-ensembles de $|X|$ qui apparaissent comme éléments d'une tour sur X et on note $M(X)$ l'ensemble des coups sur X.

Remarques 3.19.

- Comme X est localement finie, par le lemme 3.5, toutes les parties sont finies.
- Pour chaque $a \in |X|$ il existe une tour sur X de pied a et pour chaque partie (finie) S sur X, si a est un élément du dernier élément de la partie, il existe une tour sur X de pied a dont S est préfixe.

– La convention choisie pour la valeur de i_0 nous place dans un cadre ou chaque élément d'une partie indexé par un entier pair X est infiniment cohérent et chaque élément indexé par un entier impair est infiniment incohérent.

Définition 3.20 (arbre des tours). On note $|\tilde{X}|$ l'ensemble des tours sur X. L'ensemble des parties sur X muni de la relation de précédence pour l'ordre préfixe des suites définit un arbre, égal à la clôture par préfixes non-vides de $|\tilde{X}|$. On l'appelle l'*arbre des tours* sur X.

Remarque 3.21. Cet arbre a les deux propriétés suivantes :

plénitude $\forall s \in |\tilde{X}|, \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k < \|s\| \Rightarrow \exists s' \in |\tilde{X}|, \|s \wedge s'\| = k$;

bonne terminaison $\forall s, s' \in |\tilde{X}|, \|s \wedge s'\| = \|s\| \Rightarrow s = s'$.

Ces deux propriétés prendront de l'importance lors de la construction de modèles de jeux dans les chapitres 5 et 4.

Lemme 3.22. *Si de plus X est série parallèle alors chaque coup sur X apparaît comme dernier élément d'une seule partie sur X. L'arbre des tours sur X est alors en isomorphisme de graphe avec le graphe $(M(X), \vdash_X)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un coup u sur X qui apparaît comme dernier élément d'au moins deux parties différentes P et P' sur X. Prenons le plus grand préfixe commun à P et à P', $\langle u_{i_0}, \ldots, u_k \rangle$. Cette suite est non vide car $\langle |X| \rangle$ est forcément préfixe de P et de P'. Soient v et v' les deux coups sur X tels que $\langle u_{i_0}, \ldots, u_k, v \rangle$ soit un préfixe de P et $\langle u_{i_0}, \ldots, u_k, v' \rangle$ soit un préfixe de P'. On a $u \subseteq v \cap v'$. Il y a deux possibilités. Soit u_k est infiniment cohérent et c'est que v et v' sont infiniment incohérents. Auquel cas, par sérialité, on aurait que $v \cup v'$ est encore infiniment incohérent. Et par maximalité respectives de v et v' dans u_k, dans ce cas, v égale v'. Soit u_k est infiniment incohérent et de la même manière par parallélisme on conclurait que v égale v'. Dans les deux cas c'est une contradiction avec la maximalité de $\langle u_{i_0}, \ldots, u_k \rangle$. Chaque coup sur X apparaît donc comme dernier coup d'une seule partie sur X.

Et c'est une conséquence immédiate que l'arbre des tours est fidèlement représenté par le graphe orienté dont les sommets sont les coups et pour lequel il y a une arrête du sommet u au sommet v lorsque $u \vdash_X v$. □

Définition 3.23. On note $M^{\mathrm{J}}(X)$ l'ensemble des coups sur X apparaissant avec un un indice pair dans une partie sur X, on note $M^{*\mathrm{J}}(X)$ ceux d'entre eux qui ne sont pas des singletons, on note $M^{\mathrm{O}}(X)$ l'ensemble des coups sur X qui apparaissent avec un indice impair dans une partie sur X et $M^{*\mathrm{O}}(X)$ ceux d'entre eux qui ne sont pas des singletons. On appelle *coups joueur* sur X les éléments de $M^{\mathrm{J}}(X)$, *coups joueur stricts* sur X les éléments de $M^{*\mathrm{J}}(X)$, *coups opposant* sur X les éléments de $M^{\mathrm{O}}(X)$ et *coups opposant stricts* sur X les éléments de $M^{*\mathrm{J}}(X)$. On appelle parfois les singletons *coups finaux*.

Ceci fait ainsi correspondre joueur avec infinie cohérence et opposant avec infinie incohérence. Au delà du fait que seuls certains sous-ensembles (les coups) sont pris en considération dans la terminologie opposant/joueur, ce glissement terminologique a pour intérêt essentiel un traitement différent des singletons. Ainsi si les singletons sont tous ambivalent pour la cohérence (infinie), il n'en va pas de même pour la distinction opposant/joueur qui attribue une polarité aux singletons en les localisant dans les tours. Mais cette polarité locale n'implique pas une polarité globale comme l'indique l'exemple donné dans la remarque suivante.

Remarques 3.24.

– L'ensemble $M^{\mathrm{J}}(X) \cap M^{\mathrm{O}}(X)$ contient les coups sur X qui apparaissent à la fois avec un indice pair dans une partie sur X et avec un indice impair dans une (autre) partie sur X. Il ne peut donc contenir que des singletons puisque ceux-ci sont les seuls sous-ensembles de $|X|$ qui sont à la fois infiniment cohérent et infiniment incohérent. Il n'est généralement pas vide : par exemple le singleton $\{a\}$ dans l'hypercohérence finie X_0 de trame $|X_0| = \{a, b, c, d\}$ et dont la cohérence est $\Gamma^*(X_0) = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c\}\}$ apparaît à un indice pair dans la tour $\langle \{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a\} \rangle$ et à un indice impair dans la tour $\langle \{a, b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c\}, \{a\} \rangle$ donc $\{a\} \in M^{\mathrm{J}}(X_0) \cap M^{\mathrm{O}}(X_0)$.

– Mais dans le cas où X est série parallèle l'ensemble $M^{\text{J}}(X) \cap M^{\text{O}}(X)$ des coups à la fois joueur et opposant est vide (puisque chaque singleton n'apparaît qu'une fois dans l'arbre des tours).

Lemme 3.25. *Pour chaque élément a de la trame d'une hypercohérence localement finie X, le nombre de tours terminant par le singleton $\{a\}$ est fini.*

Démonstration. Soit a un élément de la trame de X et considérons le sous-arbre de l'arbre des tours décrit par l'ensemble des tours terminant sur $\{a\}$. Comme chaque tour est de longueur finie, nous avons seulement à prouver que le nombre de branches au-dessus de chaque nœud de l'arbre est fini. C'est-à-dire prouver que pour chaque coup opposant de ce sous-arbre ses sous-ensembles infiniment cohérents maximaux contenant a sont en nombre fini et que pour chaque coup joueur de ce sous-arbre ses sous-ensembles infiniment incohérents maximaux contenant a sont aussi en nombre fini.

Nous le faisons en remarquant que pour chaque sous-ensemble x contenant a et pour chaque sous-ensemble y de x infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent) maximal et contenant a, l'inclusion dans y des parties finies de x contenant a est close par la relation d'équivalence $\approx_X$ *i.e.*

$$\forall u, u' \in \mathcal{P}^a_{\text{fin}}(x), (u \approx_X u' \text{ et } u \subseteq_{\text{fin}} y) \Rightarrow u' \subseteq_{\text{fin}} y$$

En effet ceci permettra de conclure car on aura alors que le nombre de y infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent) possibles sera majoré par le nombre de classes d'équivalences pour la relation $\approx_X$ dans $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(x)$ donc *a fortiori* par le degré réduit de a dans X qui lui est fini, par hypothèse.

Il nous reste à prouver la remarque. Soient x un élément de $\mathcal{P}^a(|X|)$ et y un sous-ensemble infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent) maximal de x contenant a. Soient encore u et u' des éléments de $\mathcal{P}^a_{\text{fin}}(x)$ tels que $u \approx_X u'$ et $u \subseteq_{\text{fin}} y$. On prouve que $u' \subseteq_{\text{fin}} y$. Comme y est maximal il suffit de prouver que $y \cup u'$ est infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent).

Soit $v \subseteq_{\text{fin}} (y \cup u')$. Puisque y est infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent) et puisque $\{a\} \cup (v \cap y) \cup u \subseteq_{\text{fin}} y$, il existe un élément w de $\Gamma(X)$ (resp. $w \in \Gamma^{\perp}(X)$) tel que $\{a\} \cup (v \cap y) \cup u \subseteq w \subseteq_{\text{fin}} y$. Comme $w \cup u = w$ est cohérent (resp. incohérent), en utilisant $u \approx_X u'$, on a que $w \cup u'$ est lui aussi cohérent (resp. incohérent). De plus, $v \subseteq (w \cup u') \subseteq_{\text{fin}} (y \cup u')$. Donc $y \cup u'$ est bien infiniment cohérent (resp. infiniment incohérent). Ce qui conclut la preuve. □

Une conséquence de ce lemme est que l'ensemble des tours sur X est au plus dénombrable.

Pour chaque hypercohérence localement finie nous lui associons son déployé en tours, une hypercohérence localement finie et série parallèle dont la trame est l'ensemble des tours sur l'hypercohérence de départ.

Définition 3.26 (Structure d'hypercohérence des tours). Soit X une hypercohérence localement finie. Le *déployé en tours* de X notée $\tilde{X}$ est l'hypercohérence de trame l'ensemble des tours sur X et pour laquelle tout sous-ensemble fini non vide et non réduit à un singleton $U = \{S^0, \ldots, S^{k+1}\}$ de $|\tilde{X}|$ est strictement cohérent si et seulement si le dernier élément du plus grand préfixe commun de toute les suites S^j est indexé par un entier pair *i.e.*

$$U \in \Gamma^*(\tilde{X}) \Leftrightarrow \wedge\{i \mid \exists p, q, S^p_i \neq S^q_i\} \in 2\mathbb{N} + 1$$

Remarque 3.27. L'hypercohérence $(X^{\perp})\tilde{}$ est isomorphe à $(\tilde{X})^{\perp}$ et plus précisément la seul différence entre ces deux hypercohérences consiste en un décalage dans l'indexation des tours.

Propriétés: *Si X est un hypercohérence localement finie alors :*

3.28. *l'hypercohérence $\tilde{X}$ est série et parallèle ;*

3.29. *l'hypercohérence $\tilde{X}$ est localement finie ;*

3.30. *si U est un sous-ensemble non vide et non réduit à un singleton de $|\tilde{X}|$ alors :*

(a) *U est (strictement) infiniment cohérent ssi le dernier élément du plus long préfixe commun des éléments de U, $\wedge U$, est indexé par un entier pair ;*

(b) *U est (strictement) infiniment incohérent ssi le dernier élément du plus long préfixe commun des éléments de U, $\wedge U$, est indexé par un entier impair.*

Preuve de la propriété 28. Soient U et V deux sous-ensembles finis de $|\tilde{X}|$ non vides et non réduits à des singletons et qui s'intersectent. Les suites $\wedge U$ et $\wedge V$ sont toutes deux préfixes de $\wedge(U \cap V)$ elles sont donc comparables et $\wedge(U \cup V)$ est donc égale à $(\wedge U) \wedge (\wedge V)$. La suite $\wedge(U \cup V)$ est alors de longueur paire lorsque $\wedge U$ et $\wedge V$ sont toutes deux de longueur paire et de longueur impaire lorsque $\wedge U$ et $\wedge V$ sont de longueur impaire. Donc si U et V sont (strictement) infiniment cohérent alors $U \cup V$ est (strictement) infiniment cohérent et si U et V sont (strictement) infiniment incohérent alors $U \cup V$ est (strictement) infiniment incohérent. Ainsi $\tilde{X}$ est à la fois série et parallèle. □

Preuve de la propriété 29. Nous prétendons que pour chaque tour $T \in |\tilde{X}|$ le degré réduit de T dans $\tilde{X}$ est borné par la taille de T et donc que $\tilde{X}$ est localement finie. Pour établir cela nous montrons qu'à chaque fois que deux éléments de $\mathcal{P}^T_{\text{fin}}(|\tilde{X}|)$ ont le même inf, qui est en particulier un préfixe de T, alors ces deux éléments sont équivalents pour la relation $\approx_{\tilde{X}}$. Soient U et U' deux tels éléments de $\mathcal{P}^T_{\text{fin}}(|\tilde{X}|)$ et soit V un troisième élément de $\mathcal{P}^T_{\text{fin}}(|\tilde{X}|)$. Comme $T \in U \cap V$, $\wedge(U \cup V)$ est égal à $(\wedge U) \wedge (\wedge V)$ et la même chose est vraie pour U'. Donc $\wedge(U \cup V)$ et $\wedge(U' \cup V)$ sont égaux. Il y a alors deux cas : soit l'un des deux ensembles $U \cup V$ et $U' \cup V$ est un singleton, qui est alors égal à $\{T\}$ auquel cas $\wedge(U \cup V) = \wedge(U' \cup V) = T$ et ainsi $U \cup V = \{T\}$ et $U' \cup V = \{T\}$ sont tous deux cohérents ; soit aucun de ces deux ensemble n'est un singleton et dans ce cas leur cohérence dans $\tilde{X}$ dépend uniquement de la parité du dernier élément de leur plus grand préfixe commun respectif dont nous savons qu'elle est la même puisque ce préfixe est le même pour les deux ensembles. On a donc bien $U \approx_{\tilde{X}} U'$ ce qui achève la preuve. □

Preuve de la propriété 30. la première chose à remarquer est qu'il existe forcément S et T des éléments de U tels que $\wedge U = S \wedge T$. Ainsi pour toute sous-ensemble fini V de U il suffit de former $V \cup \{S, T\}$ pour obtenir un sous-ensemble de U qui contient V et qui admet le même plus grand préfixe commun que U. Ceci induit que si le dernier élément de $\wedge U$ est indexé par un entier pair alors U est (strictement) infiniment cohérent et que si cet entier est impair alors U est (strictement) infiniment incohérent. Comme U ne peut pas être à la fois infiniment cohérent et infiniment incohérent (par finitude locale) et en utilisant le fait que $\wedge U$ a forcément un dernier élément et que son indice est soit pair soit impair alors on a aussi la réciproque c'est-à-dire que lorsque U est strictement infiniment cohérent cet indice est pair et lorsque U est strictement infiniment incohérent cet indice est impair. □

Dans le cas série le déployé en tours est un déployé rigide parallèle

Nous rappelons brièvement quelques résultats à propos du déploiement rigide parallèle tels qu'originellement établis dans [Ehr00].

Définition 3.31. Si X et Y sont deux hypercohérences, une fonction f de la trame de X dans la trame de Y est un *morphisme de trame* de X dans Y lorsque son extension aux parties finies non vides de la trame envoie chaque sous-ensemble strictement cohérent du domaine de définition de f sur un sous-ensemble strictement cohérent de Y.

Définition 3.32. Soit X une hypercohérence. Un *déployé rigide parallèle* de X est une paire $(\hat{X}, p_X)$ où $\hat{X}$ est une hypercohérence parallèle et p_X est un morphisme de trame $\hat{X}$ dans X qui vérifie :

– pour chaque hypercohérence parallèle P et pour chaque morphisme de trame f de P dans X il existe un morphisme de trame $f' : P \to \hat{X}$ appelé *relèvement* de f le long de p_X et tel que $f = f' \mathbin{⨾} p_X$;

– (rigidité) le relèvement de p_X le long de lui-même est unique et c'est l'application identité.
On a en particulier que p est une fonction surjective de $|\hat{X}|$ dans $|X|$. Si α est un point de la trame de $\hat{X}$, alors $p_X(\alpha)$ est appelé le *pied* de α.

Remarque 3.33 *(rigidité).* Le déployé parallèle d'une hypercohérence n'est pas nécessairement unique mais si (P, p) et (P', p') sont deux déployés rigides parallèles d'une même hypercohérence, alors il existe un unique isomorphisme entre P et P' qui commute avec p et p'.

Proposition 3.34 (existence). *[Ehr00]. Pour chaque hypercohérence X, un déployé rigide parallèle particulier de X est $(\hat{X}, \pi)$, défini par :*

- *la trame de $\hat{X}$ est égale à $\cup_{a\in|X|}\mathcal{F}_{\{a\}}$ où $\mathcal{F}_u$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\Gamma_u(X) = \{v \in \Gamma(X) | u \subseteq v\}$ qui sont clos par unions finies et maximaux pour cette propriété. De manière équivalente un sous-ensemble α de $\Gamma_u(X)$ est un élément de $\mathcal{F}_u$ ssi $\forall v, w \in \alpha, v \cup w \in \Gamma(X)$ et pour chaque $v' \in \Gamma_u(X)$ si $\forall v \in \alpha, v \cup v' \in \Gamma(X)$ alors v' est encore un élément de α.*
- *un sous-ensemble $U = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}\}$ de $|\hat{X}|$ est strictement cohérent dans $\hat{X}$ lorsque, pour chaque famille $(u_i)_{0\leq i\leq n+1}$ telle que $\forall i, u_i \in \alpha_i$, le sous-ensemble $\cup_{0\leq i\leq n+1} u_i$ de $|X|$ est cohérent dans X.*
- *l'application π associe à chaque α de la trame de $\hat{X}$ l'unique point a de la trame de X tel que $\alpha \in \mathcal{F}_{\{a\}}$.*

En utilisant cette dernière proposition nous montrons maintenant que dans le cas ou l'hypercohérence X est série et localement finie son déployé en tours est un déployé rigide parallèle. Ceci s'avérera utile pour l'étude du comportement logique du déployé en tours puisque nous tirerons ainsi partie des propriétés logiques du déployé rigide parallèle.

Théorème 3.35. *Si X est localement finie et série alors $p : \tilde{X} \to X$ est un morphisme de trame et $(\tilde{X}, p)$ est un déployé rigide parallèle de X.*

Preuve du théorème 3.35. On commence par établir que p est un morphisme de trame. Soit $U = \{T_1, \dots, T_n\} \in \Gamma^*(\tilde{X})$ et soit x le dernier élément de $\wedge U$. Pour chaque i soit $\{a_i\}$ le dernier élément de T_i et soit encore y_i l'élément qui fait suite à x dans T_i. Alors $p(U) = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq x$ pour chaque i, $a_i \in y_i$ et il existe j et k tels que $y_j \neq y_k$. Par sérialité y_j et y_k sont disjoints et donc $p(U)$ n'est pas tout entier contenu dans un des y_i. Toujours par sérialité, le sous-espace de X de trame $\cup\{y_i | 1 \leq i \leq n\}$ est égal à $\oplus\{Y_i | 1 \leq i \leq n\}$ où Y_i est le sous-espace de X de trame y_i. De quoi l'on déduit finalement que $p(U)$ est strictement cohérent dans ce sous-espace et donc dans X.

Supposons que l'on ait prouvé que $\tilde{X}$ est en isomorphisme de trame avec $\hat{X}$ par le relèvement $\hat{p}$ de p le long de π. Alors :

- Pour chaque hypercohérence parallèle P et pour chaque morphisme de trame $f : P \to X$, la composition $\hat{f} \,;\, \hat{p}^{-1}$ du relèvement de f le long de π et du morphisme inverse de $\hat{p}$ est un morphisme de trame de P dans $\tilde{X}$ tel que $(\hat{f} \,;\, \hat{p}^{-1}) \,;\, p$ est égal à f c'est à dire un relèvement de f le long de p.
- Tout relèvement $\tilde{p}$ de p le long de lui-même vérifie $p = \tilde{p} \,;\, p = \tilde{p} \,;\, \hat{p} \,;\, \pi$. Mais $\hat{p}^{-1} \,;\, p = \pi$ donc $\hat{p}^{-1} \,;\, \tilde{p} \,;\, \hat{p} \,;\, \pi = \pi$ et $\hat{p}^{-1} \,;\, \tilde{p} \,;\, \hat{p}$ est un relèvement de π le long de lui-même ainsi c'est l'application identité sur $\hat{X}$ en conséquence de quoi $\tilde{p} = \hat{p} \,;\, \hat{p}^{-1}$ est l'application identité sur $\tilde{X}$. Il n'y a ainsi qu'un seul relèvement de p le long de lui-même et c'est l'identité.

Cela conclurait donc la preuve que $(\tilde{X}, p)$ est un déployé rigide parallèle de X.

Il reste à prouver que $\tilde{X}$ est en isomorphisme de trame avec $\hat{X}$ par un relèvement $\hat{p}$ de p le long de π.

Nous commençons par définir une application Tour : $\hat{X} \to \tilde{X}$. comme suit. Soit un élément α de $\hat{X}$ de pied a. Pour chaque $y \in \mathcal{P}^*(X)$ on note α^y le sous-ensemble $\{u \in \alpha | u \subseteq y\} = \alpha \cap \mathcal{P}(y)$ de α. $\mathrm{Tour}(\alpha) = \langle x_{i_0}, \dots, x_n\rangle$ est définie récursivement comme suit :

première étape $x_{i_0} = |X|$

étape impaire $x_{2k+1} = \downarrow (x_{2k}, a)$ pour chaque k tel que x_{2k} n'est pas un singleton

étape paire $x_{2k+2} = \cup\alpha^{x_{2k+1}}$ pour chaque k tel que x_{2k+1} n'est pas un singleton

dernière étape $x_n = \{a\}$

Pour prouver que $\mathrm{Tour}(\alpha)$ est une tour sur X il suffit de prouver qu'à chaque étape paire $x_{2k+1} \vdash x_{2k+2}$ (c'est trivialement le cas pour les étapes impaires). Pour chaque $u \subseteq^*_{\mathrm{fin}} \cup\alpha^{x_{2k+1}}$ il existe un recouvrement fini $v_1, \ldots, v_n \in \alpha^{x_{2k+1}}$ de u et, en utilisant la clôture de α par unions finies, $\cup v_i$ est un sous-ensemble cohérent de $\alpha^{x_{2k+1}}$ qui contient u. Il en résulte que $\cup\alpha^{x_{2k+1}}$ est infiniment cohérent et comme $\cup\alpha^{x_{2k+1}} \subsetneq x_{2k+1}$ il existe un sous-ensemble infiniment cohérent maximal y_{2k+2} de x_{2k+1} qui contient $\alpha^{x_{2k+1}} = x_{2k+2}$. Il faut maintenant prouver que $y_{2k+2} \subseteq \cup\alpha^{x_{2k+1}} = x_{2k+2}$ pour conclure que $x_{2k+1} \vdash x_{2k+2}$. En fait nous prouvons le résultat plus fort :

$$\forall u \subseteq_{\mathrm{fin}} y_{2K+2}, (a \in u \text{ et } u \not\subseteq \downarrow (y_{2k+2}, a)) \Rightarrow u \in \alpha.$$

On aura alors soit $y_{2k+2} = \{a\}$ et clairement $y_{2k+2} = x_{2k+2}$, soit $\exists b \in y_{2k+2} - \downarrow (y_{2k+2}, a)$, auquel cas, pour chaque élément c de y_{2k+2}, $\{a, b, c\} \not\subseteq \downarrow (y_{2k+2}, a)$, donc $\{a, b, c\} \in \alpha$ et, comme $\{a, b, c\} \in \alpha^{x_{2k+1}}$, $c \in \cup\alpha^{x_{2k+1}} = x_{2k+2}$.

Nous prouvons par récurrence sur i que

$$\forall u \subseteq_{\mathrm{fin}} y_i, (a \in u \text{ et } u \not\subseteq \downarrow (y_i, a)) \Rightarrow u \in \alpha$$

pour chaque entier i pair tel que $i_0 \leq i < n$ et en posant $y_{i_0} = |X|$ si besoin.

- Soit $u \subseteq_{\mathrm{fin}} y_{2i_0}$ tel que $a \in u \not\subseteq \downarrow (y_{2i_0}, a)$. y_{2i_0} est un sous-ensemble infiniment cohérent maximal de $|X|$ qui ou bien est égal à $|X|$ (si $i_0 = 0$) ou bien qui contient $\cup\alpha^{|X|} = \cup\alpha$ (si $i_0 = 1$). Donc, pour chaque élément v de α, $u \cup v \subseteq_{\mathrm{fin}} y_{2i_0}$ et $a \in u \cup v \not\subseteq \downarrow (y_{2i_0}, a)$. En conséquent, par sérialité, $u \cup v$ est cohérent. Ainsi chacun de ces u appartient bien à α.
- Supposons que cela soit prouvé pour $i \leq 2k$ et soit u un sous-ensemble fini de y_{2k+2} tel que $a \in u \not\subseteq \downarrow (y_{2k+2}, a)$. Soit $v \in \alpha$. Il y a deux cas. Ou bien $v \in \alpha^{x_{2k+1}}$, et alors $v \subseteq x_{2k+2}$ donc $u \cup v \subseteq y_{2k+2}$ et $a \in u \cup v \not\subseteq \downarrow (y_{2k+2}, a)$ ce qui permet de conclure à la cohérence de $u \cup v$ en utilisant la sérialité. Ou bien $a \in v \not\subseteq x_{2k+1}$ et alors comme $v \subseteq_{\mathrm{fin}} x_{2i_0}$ et puisque pour chaque $k' \leq k$, si $v \subseteq x_{2k'+1}$ alors $v \subseteq x_{2k'+2}$, c'est qu'il existe un $k' \leq k$ tel que $v \subseteq_{\mathrm{fin}} x_{2k'}$ et $a \in v \not\subseteq x_{2k'+1}$. Donc $u \cup v \subseteq x_{2k'}$ et $u \cup v \not\subseteq \downarrow (x_{2k'+1}, a)$ ainsi par sérialité $u \cup v$ est encore cohérent. Dans les deux cas, $u \in \alpha$.

Donc $\mathrm{Tour}(\alpha) = \langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle$ est une tour sur X pour tout $\alpha \in |\hat{X}|$. de plus on a prouvé que pour chaque $u \subseteq |X|$:

$$(\exists k (a \in u \subseteq_{\mathrm{fin}} x_{2k}) \text{ et } (u \not\subseteq x_{2k+1})) \Rightarrow u \in \alpha. \tag{3.2}$$

On construit maintenant ce qui sera la réciproque de Tour. Soit donc une opération sur les tours, notée alpha, définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{alpha}(\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle) =& \{u \in \mathcal{P}^a_{\mathrm{fin}}(|X|) \mid \exists k, (i_0 \leq 2k < n) \text{ et } (u \subseteq_{\mathrm{fin}} x_{2k}) \text{ et } (u \not\subseteq x_{2k+1})\} \\ & \cup \{\{a\}\} \end{aligned}$$

Pour chaque tour $\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle$. Dans cette définition, pour chaque u l'entier k est clairement unique. On dit alors que le *niveau* de u dans la tour est $2k$. Le niveau de $\{a\}$ est n qui est bien pair. On prouve maintenant que $\alpha = \mathrm{alpha}(\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle)$ est un élément de la trame de $\hat{X}$.

- Par sérialité, il est clair que les éléments de $\mathrm{alpha}(\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle)$ sont dans $\Gamma^a(X)$.
- L'ensemble α est clos par unions finies. Si $u_1, \ldots, u_p$ sont des éléments de α, de niveaux respectifs $k_1, \ldots, k_p$ alors $\cup u_i \subseteq_{\mathrm{fin}} x_{\wedge k_i}$ et, si $\cup u_i \neq \{a\}$, $\cup u_i \not\subseteq x_{(\wedge k_i)+1}$ donc $\cup u_i$ est un élément de α.
- L'ensemble α est maximal pour cette propriété dans $\Gamma^a(X)$. En effet, considérons un élément u de $\Gamma^a(X)$ non réduit au singleton $\{a\}$. Comme $x_{i_0}, \ldots, x_n$ est une suite décroissante commençant par $x_{i_0} = |X|$ il existe un (unique) indice k entre i_0 et $n - 1$ tel

que $u \subseteq x_k$ et $u \not\subseteq x_{k+1}$. Si ce k est pair, u est déjà dans α. Si ce k est impair alors $x_{k+1} \subsetneq u \cup x_{k+1} \subseteq x_k$, donc par maximalité de x_{k+1} dans x_k, $u \cup x_{k+1}$ est strictement infiniment incohérent. Ainsi il existe un v tel que $u \subseteq v \subseteq_{\text{fin}} u \cup x_{k+1}$ et pour chaque w, si $v \subseteq w \subseteq_{\text{fin}} u \cup x_{k+1}$ alors $w \in \Gamma^{*\perp}(X)$. Mais il existe $u' \in \alpha$ de niveau $k+1$ qui contient $v \cap x_{k+1}$ (si x_{k+1} n'est pas un singleton, il suffit de choisir un élément $b \in x_{k+1}$ tel que $b \notin x_{k+2}$ et de prendre $u' = v \cup \{b\}$). Finalement $v \subseteq u \cup u' \subseteq u \cup x_{k+1}$, par conséquent $u \cup u'$ est strictement incohérent. Donc α est maximal.

En utilisant 3.2 on a $\mathrm{alpha}(\mathrm{Tour}(\beta)) = \beta$ pour chaque élément β de la trame de $\hat{X}$. Supposons que $\mathrm{alpha}(\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle) = \beta$. Alors, pour chaque i tel que $i_0 \leq 2i-1 \leq n$, l'ensemble $\beta^{x_{2i-1}}$ est l'ensemble des éléments de β de niveau supérieur ou égal à $2i$ dans $\langle x_{i_0}, \ldots, x_n \rangle$. Réciproquement, $\cup \beta^{x_{2i_1}}$ est égal à x_{2i}, pour chaque i tel que $i_0 \leq 2i-1 \leq n$. Ainsi on a que $\mathrm{Tour}(\mathrm{alpha}(S))$ est égal à S pour chaque tour S sur X. Ce qui achève de prouver que $|\tilde{X}|$ est en bijection avec $|\hat{X}|$ par l'application alpha de réciproque Tour. De plus il est établit que $p = \alpha \mathbin{⨾} \pi$.

Nous prouvons maintenant que alpha est un isomorphisme de trame.

Soit $\{T_0, \ldots, T_{n+1}\}$ un ensemble de tours $T_i = \langle x^i_{i_0}, \ldots, x^i_{n_i} \rangle$ sur X et soit $\langle x_{i_0}, \ldots, x_k \rangle = \wedge T_i$. L'ensemble $\{T_0, \ldots, T_{n+1}\}$ est choisi non réduit à un singleton ainsi x_k ne peut pas être un singleton. Si $\{T_0, \ldots, T_{k+1}\}$ est strictement cohérent alors k est pair. On prouve que pour chaque famille $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, si, pour tout i, u_i est un élément de α_i dont le niveau sera noté k_i, alors $\mathrm{alpha}(\{T_0, \ldots, T_{n+1}\})$ est strictement cohérent. Soit $p = (\wedge k_i) \wedge k$. Alors p est pair, $\cup_{0 \leq i \leq n+1} u_i \subseteq x_p$ et il y a deux cas : ou bien $p = k$ et donc tous les x^i_{p+1} sont disjoints et $\cup_{0 \leq i \leq n+1} u_i \cap x_{p+1} \neq \emptyset$, ou bien il existe i' tel que $k_{i'} = p < k$ et donc $u_{i'} \not\subseteq x_{p+1}$ et l'ensemble $\cup_{0 \leq i \leq n+1} u_i$ rencontre l'ensemble x_{p+1} sans y être inclus. Dans les deux cas on conclut par sérialité que $\cup_{0 \leq i \leq n+1} u_i$ est strictement cohérent. Donc alpha conserve la cohérence stricte. Maintenant, si $\{T_0, \ldots, T_{n+1}\}$ est strictement incohérent alors k est impair. Comme x_k n'est pas un singleton $n_i > k$, pour chaque i et il existe une famille $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ telle que pour chaque i, u_i est de niveau $k+1$ dans α_i. Soit $u = p(\{T_0, \ldots, T_{n+1}\})$. En utilisant le lemme 3.25, on a que le nombre de x tel que $x_k \vdash x$ et $x \cap u \neq \emptyset$ est fini. Pour chaque i et pour chaque x de cette sorte, si $x \neq x^i_{k+1}$ on choisit un élément a^i_x de x^i_{k+1} qui n'est pas dans x. Pour chaque i, notons maintenant v_i l'union de u_i avec l'ensemble de tous les a^i_x. Alors $v_i \subseteq_{\text{fin}} x^i_{k+1}$ et v_i est de niveau $k+1$ dans α_i. Donc $v_i \in \alpha_i$ et $\cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i \subseteq x_k$. Mais pour chaque x tel que $x_k \vdash x$, on a $\cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i \not\subseteq x$ car ou bien $x \cap u = \emptyset$ et $u \subseteq \cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i$, ou bien si $x \cap u \neq \emptyset$ il existe un x^i_{k+1} différent de x donc $a^i_x \in \cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i$ et $a^i_x \notin \cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i$. Finalement la maximalité d'un tel x dans x_k implique la stricte incohérence de $\cup_{0 \leq i \leq n+1} v_i$. Donc $\mathrm{alpha}(\{T_0, \ldots, T_{n+1}\})$ est strictement incohérent ce qui prouve que alpha préserve l'incohérence stricte. □

Une caractérisation par la théorie des graphes

Dans cette section, nous caractérisons les coups dans les tours par des notions de théorie des graphes. Cette digression s'avérera en fait très utile pour l'étude du déployé d'une exponentielle.

Définition 3.36 (intervalle fort). Soit X une hypercohérence localement finie série parallèle. Un sous-ensemble non vide x de $|X|$ est un *intervalle* de X lorsque, pour chaque élément b de $|X| - x$, ou bien $\forall y \subseteq^* x, y \cup \{b\} \in \Delta(X)$, ou bien $\forall y \subseteq^* x, y \cup \{b\} \in \Delta^\perp(X)$. L'ensemble des intervalles de X est noté $I(X)$. Un intervalle x de X est *fort* si pour chaque intervalle y de X qui intersecte x, $x \subseteq y$ ou $y \subseteq x$. L'ensemble des intervalles forts est noté $I_{\mathrm{s}}(X)$.

Proposition 3.37. *Soit X un hypercohérence localement finie série parallèle. Alors les intervalles forts de X sont exactement les éléments des tours sur X (*i.e. $I_{\mathrm{s}}(X) = M(X)$*) et les intervalles sur X sont exactement les unions non vides d'éléments de $M(X)$ justifié par un même $x \in M(X)$ (*i.e. $I(X) = \{\cup A \mid \exists x \in M(X), A \subseteq^* S(x)\}$*).*

Démonstration. On commence par prouver que $\{\cup A \mid \exists x \in M(X), A \subseteq^* S(x)\} \subseteq I(X)$ et $M(X) \subseteq I_{\mathrm{s}}(X)$ par induction sur la hauteur des éléments de $M(X)$ dans les tours.

Trivialement le premier élément de chaque tour, $|X|$, est un intervalle fort. Supposons maintenant qu'un élément x_n d'une tour soit un intervalle fort et soit A un sous-ensemble non vide de $S(x_n)$. Supposons de plus que x_n est infiniment cohérent et que donc chaque élément de $S(x)$ est infiniment incohérent. L'autre cas, où x_n est infiniment incohérent se traite de la même manière que non allons traiter celui-ci, modulo l'échange des rôles entre l'incohérence et la cohérence et entre la sérialité et le parallélisme. Soit b un élément de $|X| - \cup A$, il y a deux cas :

1. Si $b \notin x_n$. Ce b est un élément de $|X| - x_n$. Donc en utilisant le fait que x_n est un intervalle et en utilisant le fait que $y \subseteq^* \cup A$ implique $y \subseteq^* x_n$, nous obtenons facilement que ou bien $\forall y \subseteq^* \cup A, y \cup \{b\} \in \Delta(X)$, ou bien $\forall y \subseteq^* \cup A, y \cup \{b\} \in \Delta^\perp(X)$.
2. Si $b \in x_n$. Soit y un sous-ensemble non vide de $\cup A$. Comme X est parallèle, par la proposition 3.15, $x_n = \&_{x \in S(x_n)} x$. De plus y rencontre un élément de A et b un élément de $S(x_n)$, ainsi $y \cup \{b\}$ rencontre au moins deux éléments différents de $S(x_n)$. Cet ensemble est donc infiniment cohérent. En conséquent, $\forall y \subseteq^* \cup A, y \cup \{b\} \in \Delta(X)$.

Donc $\cup A$ est un intervalle. Il reste à prouver que si $\cup A \in M(X)$, c'est à dire si A est un singleton, disons $\{x_{n+1}\}$, alors l'intervalle $\cup A = x_{n+1}$ est fort. Soit z un intervalle sur X tel que x_{n+1} intersecte z. Comme x_n intersecte aussi z, le fait que l'intervalle x_n est fort implique qu'il ne peut y avoir que deux cas :

1. ou bien $x_n \subseteq z$ et il est immédiat que $x_{n+1} \subsetneq z$;
2. ou bien $z \subsetneq x_n$. dans ce cas, supposons que l'on n'ait ni $z \subseteq x_{n+1}$, ni $x_{n+1} \subseteq z$. Pour chaque élément b de x_{n+1}, par sérialité, $z \cup \{b\}$ est infiniment cohérent (le contraire contredirait la maximalité de x_{n+1}). Donc, en exploitant le fait que z est un intervalle, nous avons que $\forall b \in x_{n+1} - z, \forall y \subseteq^* z, y \cup \{b\} \in \Delta^*(X)$. En particulier, si $y = x_{n+1} \cap z$ alors $x_{n+1} - y$ est non vide. En utilisant le parallélisme nous obtenons ainsi que $x_{n+1} = \cup_{b \in x_{n+1} - y}(x_{n+1} \cap z) \cup \{b\} \in \Delta^*(X)$ ce qui est une contradiction. Dans ce cas, on a donc bien, aussi, que $z \subseteq x_{n+1}$ ou $x_{n+1} \subseteq z$.

Ainsi l'intervalle x_{n+1} est fort.

Nous prouvons maintenant que si z est un intervalle alors il existe $x \in M(X)$ et $A \subseteq^* S(x)$ tels que $z = \cup A$ et que si z est fort alors ce A est un singleton. Soit z un intervalle et soit a un élément de z. Soit $\langle x_{i_0}, \dots, x_n \rangle$ une tour sur X de pied a. On a $x_n = \{a\} \subseteq z \subseteq |X| = x_{i_0}$. Ainsi puisque nous savons que les x_i sont des intervalles forts on obtient qu'il existe un indice k, tel que $i_0 \leq k < n$ et $x_{k+1} \subseteq z \subseteq x_k$. De plus, comme les éléments de $S(x_k)$ sont aussi des intervalles forts nous avons que pour chaque $x \in S(x_k)$, si $z \cap x \neq \emptyset$ alors soit $x \subsetneq z$ soit $x_{k+1} \subseteq z \subseteq x$ auquel cas c'est que $x_{k+1} = z = x$. Donc $z = \cup A$ pour $A = \{x \in S(x_k) \mid x \cap z \neq \emptyset\}$. Maintenant supposons que $z \neq x_k$ et $z \neq x_{k+1}$. Alors il existe $y \in S(x_k)$ tel que $y \cap z = \emptyset$. L'ensemble $x_{k+1} \cup y$ est un intervalle et $z \cap (x_{k+1} \cup y) \neq \emptyset$ mais $z \nsubseteq x_{k+1} \cup y$ et $x_{k+1} \cup y \nsubseteq z$ Donc si z est fort c'est que bien que $z = x_k$ ou $z = x_{k+1}$. Ce qui termine la preuve. □

3.2 Comportement logique

L'arbre des tours associé à une hypercohérence est un arbre polarisé, autrement dit une structure de jeu au sens défini au début de ce chapitre. L'opération de déploiement en tour permet ainsi d'associer une structure de jeu à chaque hypercohérence localement finie. Dans cette section nous étudions le comportement de ces structures de jeux sous l'action des connecteurs logiques du modèle des hypercohérences. Le but est de décrire l'arbre des tours de l'interprétation hypercohérente d'une formule de la logique en fonction des arbres des tours de l'interprétation de ses sous-formules immédiates. En fait nous serons forcés de faire quelques hypothèses sur la nature de ces sous-formules.

La propriété d'être en isomorphisme d'arbre est clairement un relation d'équivalence. Nous notons $\cong_t$ cette équivalence. Nous noterons désormais $\cong_w$ l'équivalence par isomorphisme de trame des hypercohérences.

Le arbres de tours sont équipés d'une polarité. Celle-ci peut être donnée par la valeur de l'indice initial i_0 dans les tours, ou encore par la valeur de cohérence de la trame dans l'espace.

On dira alors d'un isomorphisme d'arbre qu'il est compatible avec la polarité, lorsque la valeur donnant celle-ci est invariante par l'isomorphisme.

Sur les déployés en tours la notion d'isomorphisme d'arbre compatible avec la polarité et la notion d'isomorphisme de trame sont équivalentes.

Proposition 3.38. *Si X et Y sont deux hypercohérences localement finie alors $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont en isomorphisme de trame ssi $|\tilde{X}|$ et $|\tilde{Y}|$ sont en isomorphisme d'arbre par un isomorphisme compatible avec la polarité.*

Un exemple canonique de deux déployés en tours en isomorphisme d'arbre mais pas en isomorphisme de trame (l'isomorphisme d'arbre est incompatible avec la polarité) est celui des déployés d'un espace et de son orthogonal.

3.2.1 Additifs

Les constructions additives commutent avec les déploiements en tours : si X et Y sont deux hypercohérences localement finies alors $(X\&Y)\tilde{} \cong_w \tilde{X}\&\tilde{Y}$ et $(X \oplus Y)\tilde{} \cong_w \tilde{X} \oplus \tilde{Y}$ (vérification facile). Mais leur action sur les arbres des tours est moins triviale. Cette action dépend essentiellement de la valeur d'infinie cohérence des trames de X et de Y, c'est-à-dire de la polarité des arbres de tours $|\tilde{X}|$ et $|\tilde{Y}|$.

Au regard de cette action des connecteurs additifs, décrite plus loin, nous fixons définitivement la convention de polarité pour les hypercohérences et les arbres de tours associés. Du point de vue de la syntaxe, $\oplus$ est un connecteur positif (puisque non réversible) et $\&$ est un connecteur négatif (réversible). Ainsi une hypercohérence dont la trame est infiniment incohérente sera considérée comme *positive* et une hypercohérence dont la trame est infiniment cohérente sera *négative*. Le cas des hypercohérences de trame vide ou égale à un singleton n'étant pas couvert par cette convention, elles restent donc de polarités indéterminées, sauf avis contraire. Ainsi, du point de vue des structures de jeu, la racine d'un arbre de tours positif est un coup opposant et la racine d'un arbre de tours négatif est un coup joueur.[2]

Le passage à l'orthogonal échange la polarité positif/négatif des hypercohérences.

Soient X et Y deux hypercohérences localement finies de trames contenant chacune au moins deux points. Une tour sur $X\&Y$ commence par $|X\&Y|$ suivie par un sous-ensemble infiniment incohérent maximal de $|X\&Y|$ c'est à dire par un sous-ensemble infiniment incohérent maximal de $|X|$ ou par un sous-ensemble infiniment incohérent maximal de $|Y|$. Tous les éléments suivant de la tour ne dépendent plus que de l'espace dans lequel a été joué ce deuxième coup. La même chose est vraie pour le connecteur $\oplus$. Ainsi l'action des connecteurs additifs sur les arbres de tours ne porte que sur les racines :

– si les deux hypercohérences X et Y sont négatives, alors l'arbre des tours sur $X\&Y$ est obtenu par juxtaposition des deux arbres $|\tilde{X}|$ et $|\tilde{Y}|$ et par le remplaçant de leurs racines par la racine commune $|X\&Y|$. Formellement :

$$\begin{aligned}|(X\&Y)\tilde{}| = \{\langle(|X\&Y|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle\ |&\langle(|X|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{X}\\ &\text{ou } \langle(|Y|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{Y}\}\end{aligned}$$

– Si l'une (ou les deux) de ces hypercohérences est (sont) positive(s), alors l'arbre des tours sur $X\ \&\ Y$ est obtenu en ne supprimant pas le premier coup de celle(s) de ces deux hypercohérences qui est (sont) positive(s) avant d'ajouter la racine $|X\ \&\ Y|$. Par rapport à la construction précédente c'est comme si le(s) arbre(s) de tours positif(s) étaient décalés par ajout d'un coup spécial au début de chaque tour avant d'appliquer la construction

[2] À ce stade le lecteur connaissant les jeux polarisés d'Olivier Laurent ([Lau02b]) pourra croire à une inversion de convention par rapport à ces jeux. Rien de cela : le jeu polarisé que nous associerons à un arbre de tours sera la forêt obtenue par effacement de sa racine. Les coups initiaux d'un jeu positif seront bien de polarité joueur et ceux d'un jeu négatif seront bien de polarité opposant, comme dans les jeux polarisés standards.

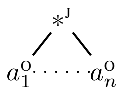
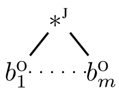
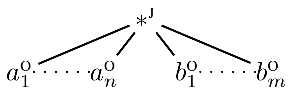
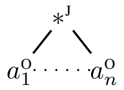
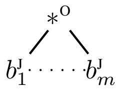
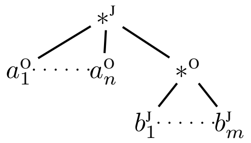
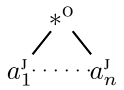
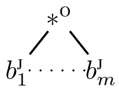
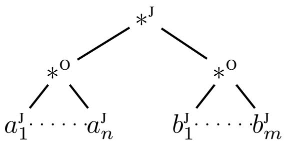
précédente. Formellement : si X est négatif et Y positif alors

$$\widetilde{(X\&Y)} = \{\langle(|X\&Y|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle \mid \langle(|X|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{X} \text{ ou } \langle u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{Y}\}$$

et si les deux espaces sont positifs alors :

$$\widetilde{(X\&Y)} = \{\langle(|X\&Y|,0),u_1,\ldots,u_n\rangle \mid \langle u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{X} \text{ ou } \langle u_1,\ldots,u_n\rangle \in \tilde{Y}\}$$

Le tableau 3.1 résume ces trois cas d'une manière graphique. Les racines des arbres de tours sont représentées par $*$ et seuls les deux premiers coups de chaque tours sont représentés. Les coups joueur sont marqués par $^{\mathrm{J}}$ et les coups opposant sont marqués par $^{\mathrm{O}}$. Pour simplifier un peu la présentation on a représenté des arbres de tours n'ayant qu'un nombre fini de coups possibles après la racine. La table du $\oplus$ se déduit par dualité.

$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$\widetilde{(X\&Y)}$	forêts polarisées
			$N\&N$
			$N\&\uparrow P$
			$\uparrow P\&\uparrow P$

TAB. 3.1 – les premiers coups du *avec* des arbres de tours

Les polarités jouent un rôle important dans l'action des connecteurs sur les arbres de tours : au minimum les polarités déterminent le premier joueur à jouer dans la structure de jeu associée. Notre parti pris est de ne pas considérer la racine des arbres de tours comme un vrai coup puisque celui-ci est toujours le même quel que soit la tour considérée. Ainsi les véritables premiers coups des jeux associés aux déploiement en tours seront ceux apparaissant en deuxièmes éléments dans les tours. La racine de l'arbre des tours est juste une *poignée* par laquelle on manipule la structure de jeu. Suivant cette idée nous appelons *coups initiaux* les coups apparaissant en second dans les tours. Les coups initiaux d'une hypercohérence positive sont des coups joueur et les coups initiaux d'une hypercohérence négative sont opposant.

Si l'on fait abstraction de la racine des tours nos structures de jeu sont des forêts et l'action du *avec* juxtapose les forêts négatives tandis que son action lorsque l'une ou plusieurs des forêts est négative est de leur ajouter un premier coup distingué (joueur) à chacune puis de les juxtaposer. L'opération qui ajoute un premier coup distingué joueur comme nouvelle racine correspond à la notation $\downarrow$ dans la quatrième colonne de la table 3.1 Cette opération transforme ainsi une forêt positive en arbre négatif. Les lettres N et P dénotent quand à elles des forêts respectivement négatives et positives. Dans cette colonne, le $\&$ dénote une opération polarisée de juxtaposition des forêts qui ne s'applique qu'à des forêts négatives.

3.2.2 Multiplicatifs

Si X et Y sont des hypercohérences localement finies séries, alors $(X \parr Y)\tilde{} \cong_w (\tilde{X} \parr \tilde{Y})\tilde{}$. En effet, c'est vrai pour le déploiement parallèle ([Ehr00]) donc par le théorème 3.35 c'est également vrai pour le déploiement en tours dans le cas série. Dualement si X et Y sont localement finies et parallèles alors $(X \otimes Y)\tilde{} \cong_w (\tilde{X} \otimes \tilde{Y})\tilde{}$.

Remarque 3.39 *(rectangles).* Soient X et Y deux hypercohérences localement finies, et soient $E \subseteq |X|$ et $F \subseteq |Y|$. Un sous-ensemble *strictement* infiniment incohérent de la trame de $X \otimes Y$ maximal pour l'inclusion dans $E \times F$ est de la forme $u \times F$ où u est un sous-ensemble *strictement* infiniment incohérent maximal de E, ou de la forme $E \times v$ où v est un sous-ensemble *strictement* infiniment incohérent maximal de F. Un sous-ensemble infiniment cohérent de la trame de $X \otimes Y$ maximal pour l'inclusion dans $E \times F$ est de la forme $u \times v$ où u est un sous-ensemble infiniment cohérent maximal de E et v est un sous-ensemble infiniment cohérent maximal de F. Donc les coups de $X \otimes Y$ sont des sous-ensemble *rectangulaires* de $|X| \times |Y|$. C'est à dire des sous-ensemble de la forme $u \times v$ où $u \subseteq |X|$ et $v \subseteq |Y|$. Par dualité les autres connecteurs multiplicatifs ($\&$ et $\multimap$) ont la même propriété.

On déduit aisément de cette remarque que la suite sans répétitions des projetés sur $|X|$ des éléments d'une tour sur $X \otimes Y$ est une tour sur X et de même la suite sans répétition des projetés sur $|Y|$ est une tour sur Y. Un tour sur $X \otimes Y$ est ainsi une sorte de *produit* d'une tour sur X et d'une tour sur Y.

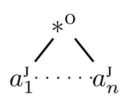
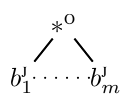
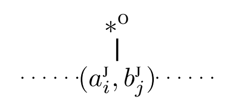
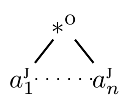
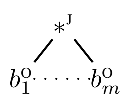
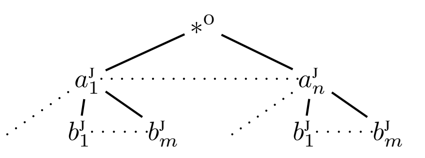
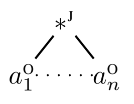
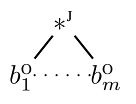
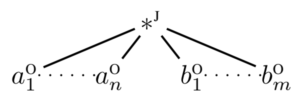
Cette remarque permet aussi d'établir que les parties dans le produit tensoriel d'hypercohérences localement finies satisfont une propriété dite de *basculement* opposant : les coups joueur doivent fournir un sous-ensemble infiniment cohérent dans chacune des composantes du tenseur tandis que l'opposant choisit la composante dans laquelle il fournit un sous-ensemble infiniment incohérent pour produire chacun de ses coups. Ainsi c'est toujours l'opposant qui a le choix de la composante dans laquelle il joue c'est ce que nous appelons un basculement opposant. Dualement, dans le *par* le basculement est joueur.

Soient X et Y deux hypercohérences localement finies disjointes. Comme pour le cas du *avec* nous avons résumé graphiquement dans le tableau 3.2 les différents cas de premiers coups dans leur produit tensoriel en fonction de la polarité de ces hypercohérences. La quatrième colonne se lit ainsi : $\downarrow$ est l'opération duale de $\uparrow$, elle ajoute une racine en bas d'une forêt négative et en fait ainsi un arbre positif ; $\odot$ est une opération appelée *tenseur négatif*, sur laquelle nous reviendrons plus tard. Elle effectue en fait une sorte de produit entre forêts négatives en entrelaçant par blocs de deux lettres opposant-joueur chaque mot de la première forêt avec chaque mot de la seconde. L'opération notée $\otimes$ est le tenseur entre forêt positives. Ces deux opérations sont décrites en détail plus loin dans cette section.

- Si X et Y sont des hypercohérences positives, les coups initiaux sur $X \otimes Y$ sont les rectangles $u \times v$ où u et v sont des sous-ensembles infiniment cohérents respectivement de $|X|$ et de $|Y|$, c'est à dire des coups initiaux respectivement sur $|X|$ et sur $|Y|$. Nous notons ces rectangles sous forme de paires (u, v) plutôt que de produits $u \times v$ dans le tableau.
- Si l'un des espaces est négatif et l'autre positif –disons, si X est positif et Y négatif– alors les coups initiaux de $X \otimes Y$ sont les rectangles $u \times |Y|$ où u est un coup initial de X. Ils sont notés u dans le tableau.
- Finalement, si X et Y sont négatifs les coups initiaux sur $X \otimes Y$ sont des coups opposant et il y faut considérer deux cas. Les coups initiaux stricts de $X \otimes Y$ sont les rectangles $u \otimes |Y|$, notés u dans le tableau, avec u coup initial strict sur X et les rectangles $|X| \otimes v$, notés v dans le tableau, avec v coup initial strict de Y. Les coups initiaux sur $X \otimes Y$ qui ne sont pas strictes (les coups initiaux qui sont aussi finaux) sont quant à eux de la forme $u \times v$ où u et v sont des coups initiaux finaux respectivement sur X et sur Y. Nous n'avons

pas représenté cette situation dans le tableau 3.2, celui-ci est donc incomplet.

Le tableau 3.3 résume les différents cas de terminaison d'un tour sur $X \otimes Y$ en fonction de la position joueur ou opposant des derniers éléments des tours dont celle-ci est le *produit*.

$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$(X \otimes Y)\tilde{}$	forêts polarisées
			$P \otimes P$
			$P \otimes \downarrow N$
			$N \odot N$

TAB. 3.2 – les premiers éléments des tours dans un tenseur

Le problème principal est l'absence d'une polarité ferme (cohérent/incohérent) pour les singletons. La polarité des singletons dépend de celle de l'avant-dernier élément de la tour dans laquelle ils apparaîssent : elle est opposant si celle-ci est joueur, et joueur si celle-ci est opposant. On parlera de *polarité relative* des singletons. Nous avons représenté dans les deuxième et troisième colonnes les derniers coups des tours de X et de Y dont la tour sur $X \otimes Y$, représentée en quatrième colonne, est issue. Dans ces quatres colonnes les singletons des tours sont les coups encadrés. Dans la quatrième colonne, le cas échéant, nous ne donnons que la projection du rectangle qui change par rapport au rectangle précédent. La première colonne exprime l'action du *produit* des tours sur la polarité (locale) des singletons. Les pointillés représentent un nombre indéterminé de coups (éventuellement nul) et les traits pleins représentent la précédence immédiate des coups dans les tours.

Si $u \times v$ est un coup joueur strict dans $X \otimes Y$ où v est un coup joueur strict dans Y, et si u' est un coup opposant de X, justifié par u, mais qui n'est pas strict, la cohérence dans le tenseur nous dit que $u' \times v$ n'est pas un coup opposant dans $X \otimes Y$. Dans cette situation pour atteindre un coup ou il jouerait u' dans X, l'opposant n'a plus le choix du côté dans lequel il joue. Tant que la projection de $u \otimes v$ sur Y est stricte il ne peut pas jouer u' (à cause de l'alternance). Deux cas se présentent alors. Soit le joueur joue un singleton v' dans Y et dans ce cas l'opposant peut maintenant jouer le dernier coup $u' \times v'$. Ce cas est un cas particulier de la deuxième ligne. Soit l'opposant se retrouve dans la situation de pouvoir jouer dans Y un singleton v'. Dans ce cas il joue des deux cotés à la fois et termine la tour en plaçant le coup $u' \times v'$. C'est ce dernier cas qui est représenté dans la troisième ligne.

Nous verrons avec l'étude des arbres de tours dans un *bien sûr* que la polarité des singletons est tout aussi critique pour la définition des jeux correspondant aux arbres de tours que la polarité de la racine ou des coups initiaux.

Les tableaux 3.2 et 3.3 présentent des situations symétriques pour peu que l'on oublie les racines des arbres de tours : la dernière ligne du tableau 3.2 correspond à la première ligne du tableau 3.3 en ce qu'elles offrent un choix symétrique entre un coup dans X ou un coup dans

	$\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$(X \otimes Y)\tilde{}$
$J \otimes J = J$	$\vdots$ a^{O}_{n-1} $\boxed{a^{\mathrm{J}}_{n}}$	$\vdots$ b^{O}_{m-1} $\boxed{b^{\mathrm{J}}_{m}}$	$\vdots$ a^{O}_{n-1} a^{J}_{n} $\vdots$ b^{O}_{m-1} $\boxed{b^{\mathrm{J}}_{m}}$ ou $\vdots$ b^{O}_{m-1} b^{J}_{m} $\vdots$ a^{O}_{n-1} $\boxed{a^{\mathrm{J}}_{n}}$
$O \otimes J = O$	$\vdots$ a^{J}_{n-1} $\boxed{a^{\mathrm{O}}_{n}}$	$\vdots$ b^{O}_{m-1} $\boxed{b^{\mathrm{J}}_{m}}$	$\vdots$ a^{J}_{n-1} $\vdots$ b^{J}_{m} $\boxed{a^{\mathrm{O}}_{n}}$ ou $\vdots$ b^{J}_{m} $\vdots$ a^{J}_{n-1} $\boxed{a^{\mathrm{O}}_{n}}$
$O \otimes O = O$	$\vdots$ a^{J}_{n-1} $\boxed{a^{\mathrm{O}}_{n}}$	$\vdots$ b^{J}_{m-1} $\boxed{b^{\mathrm{O}}_{m}}$	$\vdots$ a^{J}_{n-1} $\vdots$ b^{J}_{m-1} $\boxed{(a^{\mathrm{O}}_{n}, b^{\mathrm{O}}_{m})}$ ou $\vdots$ b^{J}_{m-1} $\vdots$ a^{J}_{n-1} $\boxed{(a^{\mathrm{O}}_{n}, b^{\mathrm{O}}_{m})}$

TAB. 3.3 – Les derniers éléments d'une tour dans le produit tensoriel

Y, les secondes lignes se correspondent en ce que le coup initial et le coup final sont tout deux dans X, et la première ligne du tableau 3.2 correspond à la dernière ligne du tableau 3.3 en ce qu'elles mettent en jeu une paire de coups.

Nous établissons maintenant une proposition donnant la construction explicite de l'arbre des tours sur $X \otimes Y$ à partir des arbres des tours sur X et sur Y.

Définition 3.40. Soient $m = m_1 \dots m_n$ et $p = p_1 \dots p_k$ des mots de longueurs paires sur deux alphabets disjoints. On définit l'ensemble de mots $m \odot p$ par :

$$\begin{aligned} \varepsilon \odot p &= \{p\} \\ m \odot \varepsilon &= \{m\} \\ (m_1 \dots m_n) \odot (p_1 \dots p_k) &= m_1 m_2 \cdot ((m_3 \dots m_n) \odot (p_1 \dots p_k)) \\ &\quad \cup p_1 p_2 \cdot ((m_1 \dots m_n) \odot (p_3 \dots p_k)) \end{aligned}$$

Si de plus les deux mots m et p sont non vides (donc $n \geq 2$ et $k \geq 2$), on définit aussi l'ensemble de mots

$$m \otimes p = \{(m_1, p_1) \cdot s \cdot (m_n, p_k) \mid s \in (m_2 \dots m_{n-1}) \odot (p_2 \dots p_{n-1})\}.$$

Ces deux opérations sur les mots s'étendent en des opérations sur les ensembles de mots : si E et F sont deux ensembles de mots de longueurs paires sur deux alphabets disjoints A et B alors

$$E \odot F = \bigcup_{\substack{m \in E \\ p \in F}} m \odot p$$

et

$$E \otimes F = \bigcup_{\substack{m \in E \setminus \{\varepsilon\} \\ p \in F \setminus \{\varepsilon\}}} m \otimes p.$$

Proposition 3.41 (Tenseur des tours). *Soient X et Y deux hypercohérences localement finies, de trames non vides, non réduites à des singletons et disjointes. L'ensemble des tours sur $X \otimes Y$ est en isomorphisme d'arbre avec l'ensemble de mots E dans les trois cas suivant :*

Tenseur négatif. *Si $|X| \in \Delta^*(X)$, $|Y| \in \Delta^*(Y)$ et tous les coups finaux de X et de Y sont joueur.*

$$E = (|X|, |Y|) \cdot \bigcup_{\substack{(u_i)_{i_0 \leq i \leq n} \in |\tilde{X}| \\ (v_i)_{j_0 \leq j \leq k} \in |\tilde{Y}|}} (u_{i_0+1} \dots u_n) \odot (v_{j_0+1} \dots v_k)$$

Tenseur positif. *Si $|X| \in \Delta^{*\perp}(X)$, $|Y| \in \Delta^{*\perp}(Y)$ et tous les coups finaux de X et de Y sont opposant. L'ensemble E est égal à*

$$E = (|X|, |Y|) \cdot \bigcup_{\substack{(u_i)_{i_0 \leq i \leq n} \in |\tilde{X}| \\ (v_i)_{j_0 \leq j \leq k} \in |\tilde{Y}|}} (u_{i_0+1} \dots u_n) \otimes (v_{j_0+1} \dots v_k).$$

Cas général. *Dans le cas général,*

$$E = \bigcup_{\substack{U = (u_i)_{i_0 \leq i \leq n} \in |\tilde{X}| \\ V = (v_i)_{j_0 \leq j \leq k} \in |\tilde{Y}|}} d(U, V) \cdot ((u_{2i_0+1} \dots u_{h(n)}) \odot (v_{2j_0+1} \dots v_{h(k)})) \cdot f(U, V)$$

où

$$d((u_i)_{i_0 \leq i \leq n}, (v_i)_{j_0 \leq j \leq k}) = \begin{cases} (|X|, |Y|) \text{ si } i_0 = j_0 = 0 \\ (|X|, |Y|) u_2 \text{ si } i_0 = 1 \text{ et } j_0 = 0 \\ (|X|, |Y|) v_2 \text{ si } i_0 = 0 \text{ et } j_0 = 1 \\ (|X|, |Y|)(u_2, v_2) \text{ si } i_0 = j_0 = 1 \end{cases}$$

et

$$f((u_i)_{i_0\leq i\leq n},(v_i)_{j_0\leq j\leq k}) = \begin{cases} \varepsilon \textit{ si } n,k\in 2\mathbb{N} \\ u_n \textit{ si } n\in 2\mathbb{N}+1 \textit{ et } k\in 2\mathbb{N} \\ v_k \textit{ si } n\in 2\mathbb{N} \textit{ et } k\in 2\mathbb{N}+1 \\ (u_n,v_k) \textit{ sinon} \end{cases}$$

et où $h(i)$ est le plus grand entier pair inférieur à i.

Démonstration. Les deux premiers cas sont bien des cas particuliers du cas général. On ne considère donc que le cas général.

Soit l'opération g sur les mots sans répétitions de $\{u \times v \mid u \in \mathcal{P}^*(|X|) \text{ et } v \in \mathcal{P}^*(|Y|)\}^*$ définie inductivement par :

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \varepsilon \\ g((u\times v)) &= (u,v) \\ g(m\cdot(u\times v)(u\times v'))) &= g(m\cdot(u\times v))\cdot v' \\ g(m\cdot(u\times v)(u'\times v))) &= g(m\cdot(u\times v))\cdot u' \\ g(m\cdot(u\times v)(u'\times v'))) &= g(m\cdot(u\times v))\cdot(u',v') \end{aligned}$$

où $u \neq u'$ et $v \neq v'$.

L'opération g est clairement totale et injective. De plus, elle préserve les longueurs des infs préfixes binaires. En effet, il est clair qu'elle préserve la longueur des mots et la relation de précédence préfixe. pour montrer que g est un isomorphisme d'arbre de $|(X \otimes Y)\rceil$ dans E, il suffit donc de voir que les images par cette opération de deux mots incomparables sont deux mots incomparables. À symétrie près et en utilisant le fait que g préserve la précédence préfixe, il suffit de monter que $g(m\cdot(u\times v))\wedge g(m\cdot(u'\times v')) = g(m)$, pour $v \neq v'$, ce qui est immédiat en raisonnant par cas sur le dernier élément de m.

En utilisant la remarque 3.39 (rectangles), on obtient facilement que g restreinte aux tours sur $X \otimes Y$ est à valeur dans E.

Pour montrer que $g : |(X\otimes Y)\rceil \to E$ est un isomorphisme d'arbre il reste donc uniquement à monter sa surjectivité. Soit donc un élément m de E. Alors il existe $U = (u_i)_{i_0\leq i\leq n}$ et $V = (v_j)_{j_0\leq j\leq k}$ deux tours, respectivement sur X et sur Y, telles que $m = d(U,V)\cdot m'\cdot f(U,V)$ avec $m' \in ((u_{2i_0+1}\dots u_{h(n)}) \odot (v_{2j_0+1}\dots v_{h(k)}))$. Nous montrons qu'il existe une tour $W = (w_l)_{l_0\leq l\leq p}$ sur $X\otimes Y$ telle que $g(W) = m$ en montrant par induction que pour tout préfixe non-vide m'' de m, il existe une partie $W' = (w_l)_{l_0\leq l\leq p'}$ telle que $g(W') = m''$ puis en montrant que w_p est un singleton.

Si $i_0 = j_0 = 0$ alors $d(u_2,v_2) = (|X|,|Y|)$. Dans ce cas, en posant $l_0 = 0$, $d(u_2,v_2)$ est l'image par g du mot associé à la partie $\langle(|X\otimes Y|,l_0)\rangle$ sur $X\otimes Y$ et $|X\otimes Y|$ est infiniment cohérent dans $X\otimes Y$. Dans tous les autres cas $|X\otimes Y|$ est strictement infiniment incohérent dans $X\otimes Y$, on pose alors $l_0 = 1$. Si $i_0 = 1$ et $j_0 = 0$ alors $d(u_2,v_2) = (|X|,|Y|)u_2$ et $|X\otimes Y|$ est strictement infiniment incohérent dans $X\otimes Y$. Dans ce cas, d est l'image par g du mot sans répétitions associé à la suite $\langle(|X\otimes Y|,l_0)(u_2\times|Y|)\rangle$. Le sous-ensemble u_2 est infiniment cohérent dans X et le sous-ensemble $|Y|$ est infiniment cohérent dans Y. On en déduit que $u_2\times|Y|$ est infiniment cohérent. De plus en combinant la remarque 3.39 avec le fait que $|X| \vdash_X u_2$ on a que $|X\otimes Y| \vdash_{X\otimes Y} u_2\times|Y|$. La suite $\langle(|X\otimes Y|,j_0),(u_2\times|Y|,2)\rangle$ est donc bien une partie sur $X\otimes Y$. Le cas $i_0 = 0$ et $j_0 = 1$ se traite de manière symétrique. Enfin si $i_0 = 1$ et $j_0 = 1$ alors $d(u_2,v_2) = (|X|,|Y|)(u_2,v_2)$ et $|X\otimes Y|$ est strictement infiniment incohérent dans $X\otimes Y$. On a $g((|X\otimes Y|)(u_2\times v_2)) = d(u_2,v_2)$. Les sous-ensembles u_2 et v_2 sont infiniment cohérents donc $u_2\times v_2$ aussi. La maximalité de $u_2\times v_2$ est une conséquence de la remarque 3.39. Ainsi $\langle(|X\otimes Y|,l_0)(u_2\times v_2,2l_0)\rangle$ est bien une partie sur $X\otimes Y$.

On suppose que l'on a une partie $W' = (w_l)_{l_0\leq l\leq p'}$ sur $X\otimes Y$ telle que $g(W') = d(u_2,v_2)\cdot m''$ pour m'' un préfixe pair de m', $w_{p'} = (u_i\times v_j)$ est infiniment cohérent et $p', i, j \in 2\mathbb{N}$. On montre que si $m'' \cdot e_1e_2$ est un préfixe de m' alors il existe un $w_{p'+1}$ et un $w_{p'+2}$ tels que cette propriété soit encore vraie pour $(w_l)_{l_0 \leq l \leq p'+2}$ et $d(U,V) \cdot m'' \cdot e_1e_2$, (*i.e.* $g((w_l)_{l_0 \leq l \leq p'+2}) = d(U,V) \cdot m'' \cdot e_1e_2$). En raisonnant par symétrie, on peut supposer que e_1 est un élément $u_{i'}$ avec $2i_0 + 1 \leq i' \leq n$. Comme $g(w_{l_0} \dots w_{p'-1}(u_i \times v_j)) = d(u_2, v_2) \cdot m''$ et que m' est sans répétitions c'est que $i' > i$. Mais u_{i+1} n'apparaît certainement pas dans $g(W')$ puisque sinon cela contredirait la décroissance forte des w_l. En revenant à la construction $\odot$, c'est donc que $e_1 = u_{i+1}$ et $e_2 = u_{i+2}$. Il est alors facile d'utiliser la remarque 3.39 pour montrer que $w_{p+1} = u_{i+1} \times v_j$ et $w_{p+2} = u_{i+2} \times v_j$ conviennent.

Ceci prouve qu'il existe une partie $W' = (w_l)_{l_0 \leq l \leq p'}$ sur $X \otimes Y$ telle que $g(W') = d(u_2, v_2) \cdot m'$, $w_{p'} = (u_{h(n)} \times v_{h(k)})$ est infiniment cohérent et $p', i, j \in 2\mathbb{N}$. Si $n, k \in 2\mathbb{N}$ alors $h(n) = n$, $h(k) = k$, $f(u_n, v_k) = \varepsilon$ et $w_{p'}$ est égal au singleton $(u_n \times u_k)$ ce qui achève la preuve de l'existence de W. Si $n \in 2\mathbb{N}$ et $k \in 2\mathbb{N}+1$ alors $h(n) = n$, $h(k) = k-1$ et $f(u_n, v_k) = v_k$. On a alors que $w_{p'}$ est strictement infiniment cohérent et en posant $w_{p'+1} = u_n \times v_k$ on a bien que $W = (w_l)_{l_0 \leq l \leq p'+1}$ est une tour dont l'image par g est m. Le cas $n \in 2\mathbb{N}$ et $k \in 2\mathbb{N}+1$ est symétrique. Finalement, si $n \in 2\mathbb{N}+1$ et $k \in 2\mathbb{N}+1$ alors on a $w_{p'} = u_{n-1} \times v_{k-1}$. À nouveau on obtient la tour W recherchée en posant $w_{p'+1} = u_n \times v_k$. □

L'hypothèse de disjonction entre X et Y a pour seul mérite de simplifier la présentation des résultats. Il est clair qu'au prix d'un attention particulière portant sur la localisation des éléments de E nous pourrions établir une proposition analogue sans cette hypothèse.

3.2.3 Exponentielles

Le traitement des exponentielles demande plus d'attention. La caractérisation du déployé d'une hypercohérence $!X$, donnée par la proposition 3.53 à la fin de cette section, est moins évidente en première lecture. Cette caractérisation nécessite notamment la définition d'objets intermédiaires sur lesquels nous établissons un certain nombre de lemmes.

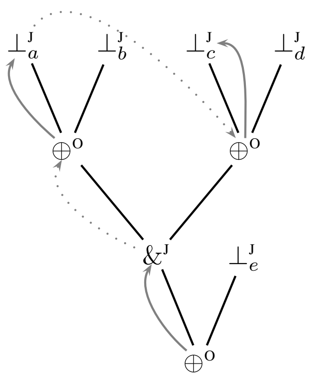


FIG. 3.1 – Arbre de X.

C'est pourquoi nous commençons par donner, en exemple, le déploiement de l'hypercohérence $!(((\perp \oplus \perp) \,\&\, (\perp \oplus \perp)) \oplus \perp)$, en exhibant les objets intermédiaires que nous définirons réellement plus loin. L'hypercohérence $X = ((\perp \oplus \perp) \,\&\, (\perp \oplus \perp)) \oplus \perp$ est trivialement série parallèle et localement finie. Son arbre syntaxique, donné dans la figure 3.1, est isomorphe à son arbre des tours, donné dans la figure 3.3. Dans cet arbre syntaxique, nous avons annoté les nœuds par la polarité opposant/joueur qui leur correspond dans l'arbre des tours $|\tilde{X}|$. Nous avons indicé les occurrences de la constante multiplicative $\perp$ par des lettres de manière à distinguer ces différents constantes, en accord avec la nécessité de délocaliser les espaces non disjoints avant de leur appliquer un connecteur additif. Ainsi l'unique point de $|\perp_a|$ est le singleton $\{a\}$ et de même pour $\perp_b$, $\perp_c$, $\perp_d$ et $\perp_e$. Le résultat principal de cette section est qu'une tour sur $!X$ est la succession de coups donnée par une visite sans répétitions d'un sous-arbre de $|\tilde{X}|$ dans lequel chaque coup opposant est suivi par un unique coup joueur. Nous avons représenté une telle visite par des arrêtes grisées dans notre exemple de la figure 3.1. Cette visite, notée $s_{\{a,c\},1}$ dans la suite, commence à la racine, passe par la feuille $\perp_a$ et arrive à la feuille $\perp_c$. Les coups opposant sont représentés en pointillés et les coups joueur en traits pleins. Nous allons voir que cette visite $s_{\{a,c\},1}$ correspond bien à une tour sur $!X$ et qu'en tronquant cette visite $s_{\{a,c\},1}$ de manière à l'arrêter sur la feuille $\perp_a$ on obtient une visite notée $s_{\{a\}}$, correspondant à une autre tour sur $!X$.

Le déploiement de $!X$ est doublement représenté dans la figure 3.2. Les deux représentations sont partielles. Les représentations complètes peuvent essentiellement être obtenues en exploitant la symétrie entre les éléments a, b, c et d de la trame de X. La trame de $!X$ est égale à

$$|!X| = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}\}.$$

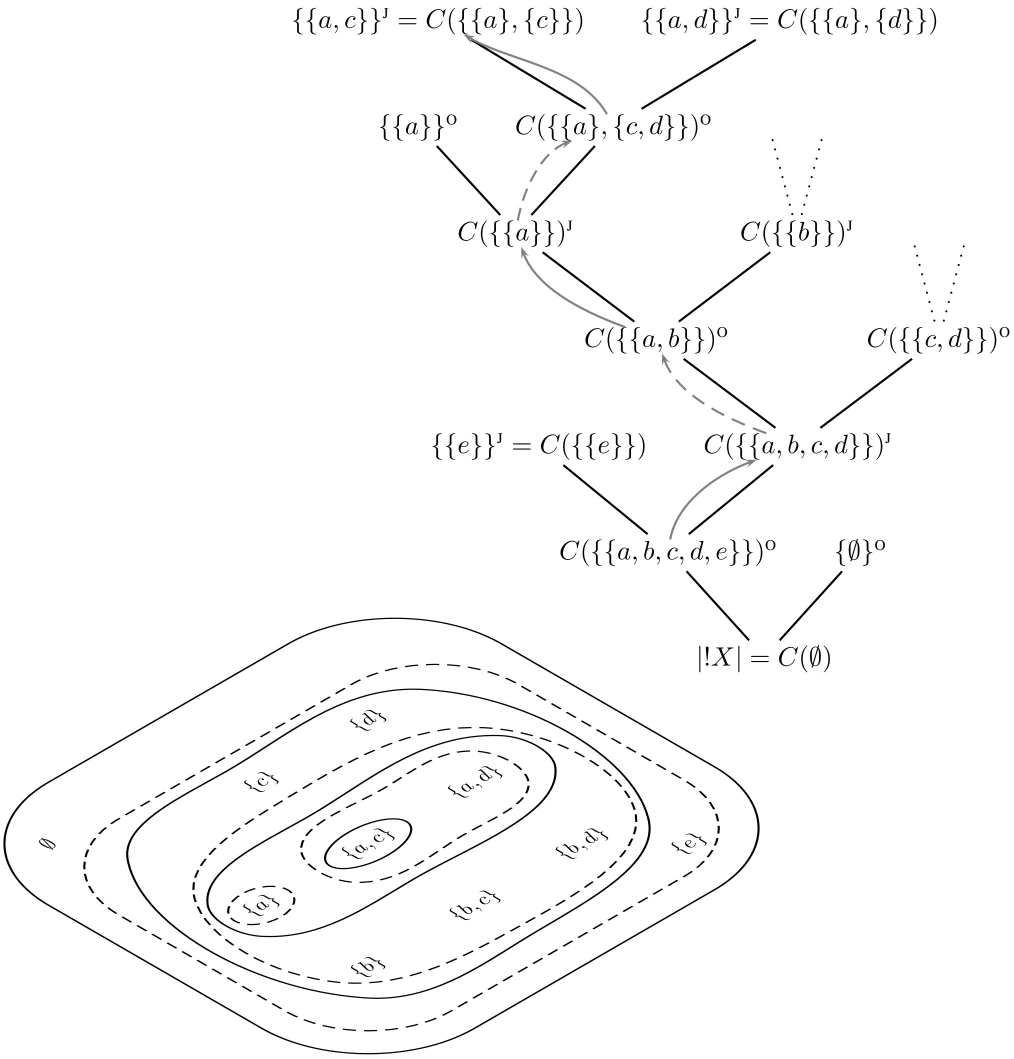


FIG. 3.2 – Déploiement de $!(((\perp_a \oplus \perp_b) \;\&\; (\perp_c \oplus \perp_d)) \oplus \perp_e)$: l'arbre des tours.

La première représentation est donnée dans un plan oblique, où figurent les points de la trame de $!X$. Les courbes fermées contenant des points de $|!X|$ représentent les ensemble d'éléments de cette trame qui sont des coups de $!X$. Les courbes fermées en pointillés sont des coups opposant et les courbes fermées en traits pleins sont des coups joueur. Deux tours sur $!X$ sont entièrement représentés dans ce plan : une tour se terminant par le singleton $\{\{a\}\}$ et une tour se terminant par le singleton $\{\{a,c\}\}$. Ces deux tours sont celles correspondant respectivement à la visite $s_{\{a\}}$ et à la visite $s_{\{a,c\}}$, mais cette représentation ne permet pas vraiment d'en rendre compte.

La seconde représentation est l'arbre des tours sur $!X$ (c'est une vue éclatée de la première). Dans cette représentation, on utilise la notation $C(\mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble. Il s'agit là de deux objets intermédiaires que nous devons expliciter. Dans notre exemple, cet ensemble $\mathcal{S}$ est le plus souvent réduit à un singleton mais il arrive aussi qu'il soit vide où qu'il contienne deux éléments. En général, l'ensemble $\mathcal{S}$ est un ensemble fini particulier de coups sur X, que nous appellerons plus loin une *tranche de avec* sur X. L'ensemble $C(\mathcal{S})$ est égal à

$$C(\mathcal{S}) = \{x \in |!X| \mid \forall u \in \mathcal{S}, x \cap u \neq \emptyset\}.$$

On a donc ,en particulier, $C(\emptyset) = |!X|$, $C(\{\{e\}\}) = \{\{e\}\}$ $C(\{\{a\}\}) = \{\{a\},\{a,c\},\{a,d\}\}$, $C(\{\{a,b,c,d,e\}\}) = |!X| \setminus \{\emptyset\}$ et $C(\{\{a,b,c,d\}\}) = |!X| \setminus \{\emptyset,\{e\}\}$. Pour vérifier que l'arbre représenté est bien l'arbre des tours sur $!X$, on vérifie, en partant de la racine vers les feuilles, que chaque nœud apparaissant dans l'arbre est bien suivi de ses successeurs pour la relation $\vdash_{!X}$ et que les feuilles sont bien des singletons. À cet effet, on peut utiliser le fait que tout élément de $\mathcal{S}$ est une section de $C(\mathcal{S})$. Ainsi, si $\mathcal{S}$ contient un coup opposant strict sur X, alors $C(\mathcal{S})$ est un coup opposant strict sur $!X$.

Certains éléments de l'arbre de la figure 3.2 ne sont pas donnés par une tranche de *avec*. Il s'agit des feuilles de polarité opposant (par exemple $\{\emptyset\}$ et $\{\{a\}\}$ dans notre arbre incomplet). Oublions ces feuilles un instant. De même, oublions la racine de l'arbre $C(\emptyset)$ et concentrons notre attention sur les tranches de *avec* successives utilisées dans cet arbre.

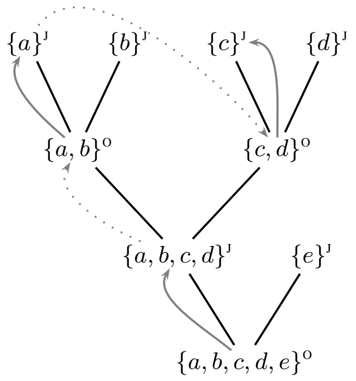


FIG. 3.3 – Arbre des tours de X

Chaque tranche de *avec* $\mathcal{S}$ est en fait l'ensemble des nœuds terminaux d'un sous-arbre de $\tilde{X}$ dans lequel chaque coups opposant est suivi d'au plus un coup joueur. Plus précisément ces nœuds terminaux déterminent un sous-arbre $A(\mathcal{S})$ de l'arbre des tours de X et passer d'un nœud de l'arbre de la figure 3.2 à un de ses nœuds fils consiste en ajouter un nouveau nœud au sous-arbre $A(\mathcal{S})$. Cet ajout d'un nœud se fait soit en remplaçant un nœud terminal de $A(\mathcal{S})$ (de polarité opposant ou joueur) par un de ses fils soit en ajoutant un nœud opposant fils d'un nœud joueur non terminal dans $A(\mathcal{S})$. Finalement, une branche de l'arbre des tours sur $!X$ détermine une certaine suite croissante de sous-arbres de l'arbre des tours sur X et cette suite correspond à une visite de l'arbre des tours sur X au sens donné précédemment. Nous illustrons cette observation en montrant comment la branche, B, déterminée par la succession de flèches grisées de l'arbre de la figure 3.2 correspond à la visite $s_{\{a,c\},1}$ de l'arbre de la figure 3.1. Nous donnons dans la figure 3.4 les arbres $A(\mathcal{S})$ définis successivement par chaque tranche de *avec* $\mathcal{S}$ apparaissant dans la branche B. Les arbres $A(\mathcal{S})$ sont des sous-arbre de l'arbre des tours sur X, représentés à l'isomorphisme entre l'arbre de la figure 3.1 et l'arbre de la figure 3.3 près.

L'étape cruciale est le passage de l'arbre déterminé par la tranche de *avec* $\{\{a\}\}$ à l'arbre déterminé par la tranche de *avec* $\{\{a\},\{c,d\}\}$. Cette étape consiste à arrêter la visite d'une branche pour en visiter une autre, à partir d'un branchement *avec*. En général pour un espace X assez gros une tour sur $!X$ peut contenir plusieurs étapes de ce types. De plus, il est en général possible qu'une tour sur $!X$ interrompe de cette façon la visite d'une branche de l'arbre des tours sur X, quitte à y revenir plus tard.

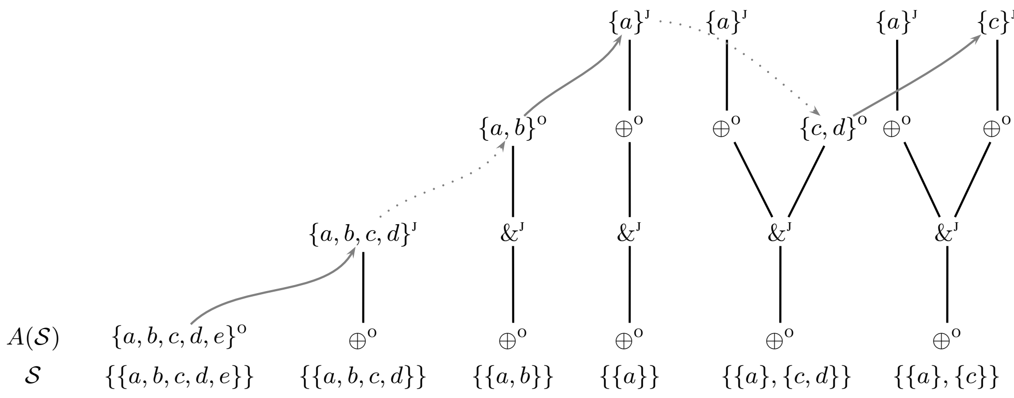


FIG. 3.4 – Une visite d'un sous-arbre de $|\tilde{X}|$ par des tranches de *avec*.

Nous avons vue, sur cet exemple, que certaines tours sur $!X$ déterminent des visites sans répétitions de sous-arbres de l'arbre des tours sur X. Dans la proposition 3.53, nous établirons précisément une bijection entre les visites d'un ensemble de sous-arbres de $|\tilde{X}|$ (en sémantique des jeux cet ensemble correspond aux stratégies finies sur $|\tilde{X}|$) et les tours sur $!X$. Cette bijection sera, plus précisément, un isomorphisme d'arbre.

Après cette entrée en matière, nous pouvons commencer à établir cette caractérisation.

Dans [Ehr00] T. Ehrhard établit la proposition suivante.

Proposition 3.42. *[Ehr00]. Si X est parallèle alors $!X$ aussi. Si X est localement finie alors $!X$ aussi.*

Remarque 3.43 *(racine).* Dans $!X$ on a toujours que $|!X| \in \Delta(!X)$.

En effet, quel que soit $u \subseteq_{\text{fin}} |!X|$ on a $u \cup \{\emptyset\} \in \Gamma(X)$ car l'ensemble des sections de $u \cup \{\emptyset\}$ est vide.

Nous nous intéressons maintenant aux coups initiaux sur $!X$ dans le cas où X est localement finie et série parallèle.

Lemme 3.44 (sous-ensembles strictement infiniment incohérent maximaux de $!X$). *Soit X une hypercohérence localement finie série parallèle.*

1. *Si U est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $|!X|$ alors il existe un unique sous-ensemble strictement infiniment incohérent u de X telle que $u \lhd U$. Ce sous-ensemble u est égal à $\{a \mid \{a\} \in U\}$ et c'est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $|X|$.*
2. *Réciproquement, si u est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $|X|$ alors il existe un unique sous-ensemble strictement infiniment incohérent U dans $!X$ tel que $u \lhd U$ et c'est le sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $|!X|$ égal à $\{x \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{fin}}(X) \mid x \cap u \neq \emptyset\}$.*

Démonstration. Soit U un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $!X$ et soit v un sous-ensemble strictement infiniment incohérent dans X tel que $v \lhd U$. Il est clair que $\{a \mid \{a\} \in U\} \subseteq v$. Maintenant, si b est un élément de v alors $v \lhd (U \cup \{\{b\}\})$. Ainsi $U \cup \{b\}$ est strictement infiniment incohérent dans $!X$ et, par maximalité de U, U contient $\{b\}$. Par conséquent, $u = \{a \mid \{a\} \in U\}$ est l'unique section strictement infiniment incohérente de U.

Supposons que v est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de X qui contient u alors v est une section de $(U \cup \{\{b\} \mid b \in v\})$ donc cet ensemble est strictement infiniment incohérent dans $!X$ et, par maximalité de U, il est égal à U. Par conséquent, u est égal à v et ceci permet de conclure à la maximalité de u.

Maintenant soit u un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de X et soit $U = \{x \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{fin}}(X) \mid x \cap u \neq \emptyset\}$. Comme il existe, pour chaque élément a de u, un clique finie $\{a\}$ contenant a, u est une section de U. Donc U est strictement infiniment incohérent dans $!X$. Si V est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal de $!X$ contenant U alors par la première partie du lemme, $v = \{a \mid \{a\} \in V\}$ est strictement infiniment incohérent dans X. Mais, pour chaque $a \in u$, le singleton $\{a\}$ appartient à U donc *a fortiori*, à V. Ainsi v contient u et par maximalité de u, u et v sont égaux. Donc chaque élément de V intersecte u et donc $V \subseteq U$. Ceci conclut en établissant la maximalité de U. □

Nous allons étendre ce lemme en une caractérisation de tous les éléments de $M(!X)$ à partir des éléments de $M(X)$ lorsque X est série parallèle. Nous pourrons ensuite établir la construction effective de l'arbre des tours sur $!X$ à partir de l'arbre des tours sur X.

Avant cela il nous faut établir quelques résultats préliminaires.

Définition 3.45. Soit X un hypercohérence localement finie série. Une *tranche de avec* sur X est un ensemble fini $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ d'éléments de $M(X)$ deux à deux disjoints, qui vérifie :

$$(\cup_{1\leq i\leq n} u_i, \Gamma_X(\cup_{1\leq i\leq n} u_i)) = \&_{1\leq i\leq n}(u_i, \Gamma_X(u_i)).$$

Pour chaque tranche de *avec*, $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sur X nous définissons aussi les ensembles suivant :

– le sous-ensemble $C(\mathcal{S})$ de $|!X|$ égal à

$$\{x \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{fin}}(X) \mid \forall u \in \mathcal{S}, u \cap x \neq \emptyset\}$$

– le sous-ensemble $c(\mathcal{S})$ de $|!X|$ égal à

$$\{\{a_1, \ldots, a_n\} \mid \forall i, a_i \in u_i\}.$$

Remarques 3.46.

– Comme $\cup_{1\leq i\leq n} u_i = \&_{1\leq i\leq n} u_i$ dans X chaque élément de $c(\mathcal{S})$ est une clique finie de X. Ainsi $c(\mathcal{S})$ est effectivement un sous-ensemble de $|!X|$.

– En conséquent, $c(\mathcal{S}) \subseteq C(\mathcal{S})$ et, comme les u_i sont deux à deux disjoints, les éléments de $C(\mathcal{S})$ sont de cardinalité supérieure ou égale à n et les seuls éléments de cardinalité n dans $C(\mathcal{S})$ sont les éléments de $c(\mathcal{S})$.

$$c(\mathcal{S}) = \{x \in C(\mathcal{S}) \mid \sharp x = \sharp \mathcal{S}\}.$$

– Il existe une opération qui à partir de $C(\mathcal{S})$ reconstruit la tranche de *avec* $\mathcal{S}$ c'est à dire la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ à indexation près. En effet considérons les éléments de $C(\mathcal{S})$ de cardinalité minimale. Ce sont les éléments de $c(\mathcal{S})$ et ils sont de cardinalité n. Maintenant on choisit un de ces éléments disons x_0, et on numérote ses éléments de 1 à n : $x_0 = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Posons alors

$$v_i = \{b \mid \{a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n\} \in C(\mathcal{S})\}$$

pour chacun de ces indices. On obtient ainsi une famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ qui est exactement $(u_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$ où σ est la permutation sur $\{1, \ldots, n\}$ donnée par $\sigma(i) = j$ ssi $a_i \in u_j$.

– $C(\mathcal{S})$ est un singleton ssi les u_i sont des singletons et $\cup u_i$ est une clique maximale de X.

Lemme 3.47. *Si $\mathcal{S}$ est une tranche de* avec *sur X alors chacun de ses éléments est une section de $C(\mathcal{S})$. De plus ces sections sont minimales : si v est une section de $C(\mathcal{S})$ alors il existe un élément u de $\mathcal{S}$ contenu dans v.*

Démonstration. Pour tout élément $u \in \mathcal{S}$, $u \subseteq \cup c(\mathcal{S}) \subseteq \cup C(\mathcal{S})$ et u intersecte chaque élément de $C(\mathcal{S})$. Donc chaque $u \in \mathcal{S}$ est une section de $C(\mathcal{S})$. Soit v une section de $C(\mathcal{S})$ et donnons nous une énumération $u_1, \ldots, u_n$ des éléments de $\mathcal{S}$. Si, pour chaque $u_i \in \mathcal{S}$, il existe un élément b_i de u_i tel que $b_i \notin v$ alors il existe une clique $x = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de X dans $C(\mathcal{S})$ qui n'intersecte pas v. C'est impossible puisque cela contredit le fait que $v \triangleleft C(\mathcal{S})$. Il existe donc un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lequel $u_i \subseteq v$. □

Lemme 3.48. *Soit X une hypercohérence localement finie série parallèle. Si $\mathcal{S}$ est une tranche de* avec *sur X alors*

$$(\cup C(\mathcal{S}), \Gamma_X(\cup C(\mathcal{S}))) = (w, \Gamma_X(w))\&(\&_{u\in\mathcal{S}}(u, \Gamma_X(u)))$$

où $w = \cup C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$. De plus w est maximal au sens où, si $w' \subseteq |X| - \cup\mathcal{S}$ est tel que

$$(w' \cup (\cup\mathcal{S}), \Gamma_X(w' \cup (\cup\mathcal{S})) = (w', \Gamma_X(w'))\&(\&_{u\in\mathcal{S}}(u, \Gamma_X(u)))$$

alors $w' \subseteq w$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que cette égalité d'espaces est vraie pour $w = \cup C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$. Puisque $\mathcal{S}$ est une tranche de *avec*, la seule chose à prouver est que, pour chaque $v \subseteq^*_{\text{fin}} C(\mathcal{S})$ si v intersecte à la fois $\cup\mathcal{S}$ et w alors v est cohérent. Chaque élément b de w appartient à une clique x, élément de $C(\mathcal{S})$, donc il existe un sous-ensemble, $y = x \cap (\cup\mathcal{S})$, de $\cup\mathcal{S}$ pour lequel $y \cup \{b\}$ est cohérent. Mais, par la proposition 3.37, $\cup\mathcal{S}$ est un intervalle sur X. C'est donc que, pour chaque élément b de w, pour chaque sous-ensemble fini non vide y de $\cup\mathcal{S}$, $y \cup \{b\}$ est cohérent. En particulier pour chaque élément b de $v \cap w$, et pour $y = v \cap (\cup\mathcal{S})$, l'ensemble $v_b = y \cup \{b\}$ est cohérent. Finalement, comme $\cap_{b\in v\cap w} v_b \supseteq y$ n'est pas vide, en utilisant le parallélisme on conclut à la cohérence de $v = \cup_{b\in v\cap w} v_b$. Soit w' un sous-ensemble de $|X| - \cup\mathcal{S}$ tel que

$$(w' \cup (\cup\mathcal{S}), \Gamma_X(w' \cup (\cup\mathcal{S})) = (w', \Gamma_X(w'))\&(\cup\mathcal{S}, \Gamma_X(\cup\mathcal{S})).$$

Il faut montrer que $w' \subseteq \cup C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$. Soit $b \in w'$. Si $u \subseteq^* \cup\mathcal{S}$, alors $u \cup \{b\}$ est infiniment cohérent. Soit $x \in c(\mathcal{S})$, on a que $x \cup \{b\}$ est une clique, donc $x \cup \{b\} \in C(\mathcal{S})$, donc $b \in C(\mathcal{S})$, et comme $b \notin \cup\mathcal{S}$ on en conclut que $w' \subseteq \cup C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$.

□

Considérons un sous-ensemble infiniment incohérent maximal v de $\cup C(\mathcal{S})$. C'est soit un sous-ensemble infiniment incohérent maximal de l'un des éléments u de $\mathcal{S}$ c'est à dire un élément de $S(u)$, soit un sous-ensemble infiniment incohérent maximal de $C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$. Dans ce dernier cas, considérons l'élément minimal v' de $M(X)$ qui contient v. Comme X est série parallèle v' est le dernier coup de la partie $\wedge_{a\in v} T(a)$ où $T(a)$ est l'unique tour de pied a sur X. Supposons que $v' \cap \cup\mathcal{S}$ n'est pas vide. Il existe donc un élément u dans $\mathcal{S}$ tel que $u \cap v'$ n'est pas vide. Comme u et v' sont des intervalles forts il sont comparables pour l'ordre inclusion et comme $v \cap u = \emptyset$ c'est que $u \subseteq v'$. D'après le lemme 3.48, $u \cup v$ est infiniment cohérent, il contient v et il est contenu dans v', ainsi

$$\wedge_{a\in v'} T(a) \subsetneq \wedge_{a\in u\cup v} T(a) \subsetneq \wedge_{a\in v} T(a).$$

Mais cela contredit la minimalité de v'. C'est donc que $v' \cap \cup\mathcal{S}$ est vide. Puisque v' est un intervalle et qu'il contient v on a, par le lemme 3.48, que v' est un sous-ensemble de $\cup C(\mathcal{S}) - \cup\mathcal{S}$. Et, par maximalité de v, v' et v sont égaux.

Pour faciliter l'écriture du résultat suivant nous étendons la notation S des coups sur X aux tranches de *avec* sur X en posant

$$S^{\mathrm{o}}(\mathcal{S}) = \{w \mid (\forall u' \in \mathcal{S}, u' \not\subseteq w) \text{ et } (\exists v \in M^{\mathrm{J}}(X), \exists u \in \mathcal{S}, w \in S(v) \text{ et } u \subseteq v)\}$$

quand $\mathcal{S}$ est non vide, et en posant $S^{\mathrm{o}}(\emptyset) = |X|$ si $|X| \in M^{\mathrm{o}*}(X)$ et $S^{\mathrm{o}}(\emptyset) = S(|X|)$ sinon.

Lemme 3.49. *Si $\mathcal{S}$ est une tranche de* avec *sur X alors $C(\mathcal{S})$ est strictement infiniment incohérent dans $!X$ ssi $\mathcal{S} \cap M^{*\mathrm{o}}(X) \neq \emptyset$. De plus, dans ce cas, l'ensemble des sections strictement infiniment incohérentes de $C(\mathcal{S})$ est exactement $\mathcal{S} \cap M^{*\mathrm{o}}(X)$.*

Démonstration. L'implication de droite à gauche de la première partie du lemme est une conséquence directe du lemme 3.47. Si v est une section strictement infiniment incohérente de $C(\mathcal{S})$

alors c'est un sous-ensemble de $\cup\mathcal{S}$. Mais, toujours d'après le lemme 3.47, v admet un sous-ensemble u qui est dans $\mathcal{S}$. Donc, d'après le lemme 3.48 et du fait que v est un sous-ensemble strictement infiniment incohérent de $|X|$, v est égal à u qui est donc strictement infiniment incohérent. Cela conclut la preuve en établissant que toute section infiniment incohérente de $C(\mathcal{S})$ est un élément de $\mathcal{S} \cap M^{*\mathrm{O}}(X)$. □

Lemme 3.50 (Coups joueur). *Si $\mathcal{S}$ est une tranche de* avec *sur X telle que $\mathcal{S} \cap M^{*\mathrm{O}}(X)$ est un singleton, disons $\{u\}$, et si $C(\mathcal{S}) \in M^{*\mathrm{O}}(!X)$ alors $S(C(\mathcal{S}))$ est en bijection avec $S(u)$ par l'application $v \mapsto C(\mathcal{S}[v/u])$ où $\mathcal{S}[v/u]$ est l'ensemble $\mathcal{S}$ dont l'élément u a été substitué par v.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{S}[v/u]$ est une tranche de *avec*. Une conséquence directe du lemme 3.49 est que $C(\mathcal{S}[v/u])$ est infiniment cohérent pour chaque élément v de $S(u)$. Soit un élément W de $S(C(\mathcal{S}))$. Alors $\cup W$ est un sous-ensemble de $\cup C(\mathcal{S})$ et $w = (\cup W) \cap u$ est un sous-ensemble de u. L'ensemble w est une section de W. En effet, c'est un sous-ensemble de $\cup W$ et pour chaque $x \in W$, $w \cap x$ est égal à $u \cap x$ qui n'est pas vide puisque x est un élément de $C(\mathcal{S})$ et u est l'une de ses sections. Ainsi w est un sous-ensemble infiniment cohérent de u. Donc il existe un élément v de $S(u)$ qui contient w. Et W est un sous-ensemble de $T = \{x \in C(\mathcal{S}) \mid x \cap w \neq \emptyset\}$. Mais d'après la définition de $C(\mathcal{S})$, T est égal à $C(\mathcal{S}[w/u])$ et il est contenu dans $C(\mathcal{S}[v/u])$ lui-même contenu dans $C(\mathcal{S})$. Comme $C(\mathcal{S}[v/u])$ est infiniment cohérent, par maximalité de W, c'est que $W = C(\mathcal{S}[v/u])$. Donc finalement pour chaque élément W de $S(C(\mathcal{S}))$, il existe $v \in S(u)$ tel que W est égal à $C(\mathcal{S}[v/u])$. De plus v est égal à $(\cup W) \cap u$. Réciproquement, si v est un élément de $S(u)$ alors, $C(\mathcal{S}[v/u])$ est infiniment cohérent et il existe un élément W de $S(\mathcal{S})$ qui contient $C(\mathcal{S}[v/u])$. Mais en utilisant ce qui précède et comme $(\cup W) \cap u$ est déjà un élément de $S(u)$, c'est que ces deux ensembles $C(\mathcal{S}[v/u])$ et W sont égaux. Ceci achève de prouver que l'application $v \mapsto C(\mathcal{S}[v/u])$ est bien un application surjective de $S(u)$ dans $S(\mathcal{S})$. Puisque $v = (\cup C(\mathcal{S}[v/u])) \cap (\cup\mathcal{S})$, cette application est aussi injective. □

Définition 3.51. Si $\mathcal{S}$ est une tranche de *avec* sur X et si v est un élément de $M(X)$ tel que $\forall u \in \mathcal{S}, u \not\subseteq v$, alors $\mathcal{S}[v]$ désigne l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{S} \cup \{v\}$ pour l'ordre inclusion, autrement dit, $\mathcal{S}[v]$ est égal à $\mathcal{S}[v/u]$ s'il existe un élément u de $\mathcal{S}$ tel que $v \subseteq u$ ou à $\mathcal{S} \cup \{v\}$ sinon.

Lorsque $\mathcal{S}[v]$ est une tranche de *avec*, $C(\mathcal{S}[v]) \subseteq C(\mathcal{S})$.

Lemme 3.52 (Coups opposant stricts).
Si $\mathcal{S}$ est une tranche de avec *sur X telle que $\mathcal{S} \subseteq M^{\mathrm{J}}(X)$ et si $C(\mathcal{S}) \in M^{*\mathrm{J}}(!X)$ alors $S(C(\mathcal{S})) \cap M^{*\mathrm{O}}(!X)$ est en bijection avec $S^{\mathrm{O}}(\mathcal{S}) \cap M^{*\mathrm{O}}(X)$ par l'application $v \mapsto C(\mathcal{S}[v])$.*

Démonstration. Soit V un élément de $S(C(\mathcal{S})) \cap M^{*\mathrm{O}}(!X)$. Le sous-ensemble V de $|!X|$ est strictement infiniment incohérent et il est maximal dans $C(\mathcal{S})$. Il existe une section strictement infiniment incohérente v de V. Puisque v est un sous-ensemble de $\cup C(\mathcal{S})$, il existe un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal w de $\cup C(\mathcal{S})$ qui contient v. Donc, en utilisant le lemme 3.48, $w \in S^{\mathrm{O}}(\mathcal{S})$. Comme v est une section de V, chaque élément x de V intersecte v, et donc aussi w. Et, comme $V \subseteq C(\mathcal{S})$, c'est que $V \subseteq C(\mathcal{S}[w])$. Mais w est une section de $C(\mathcal{S}[w])$ donc, par maximalité de V, V et $C(\mathcal{S}[w])$ sont égaux. Ainsi, chaque élément de $S(C(\mathcal{S})) \cap M^{*\mathrm{O}}(!X)$ est de la forme $C(\mathcal{S}[w])$ où $w \in S^{\mathrm{O}}(\mathcal{S})$. De plus, par le lemme 3.49, w est alors l'unique section strictement infiniment incohérente de $C(\mathcal{S}[w])$.

Soit, maintenant, un élément v de $S^{\mathrm{O}}(\mathcal{S}) \cap M^{*\mathrm{O}}(X)$. Alors, toujours par le lemme 3.49, $C(\mathcal{S}[v])$ est strictement infiniment incohérent et il existe un sous-ensemble strictement infiniment incohérent maximal V de $C(\mathcal{S})$, autrement dit un élément de $S(C(\mathcal{S})) \cap M^{*\mathrm{O}}(!X)$, qui contient $C(\mathcal{S}[v])$. En utilisant ce qui précède, V est un $C(\mathcal{S}[w])$ pour un élément w de $S^{\mathrm{O}}(\mathcal{S})$. Mais $C(\mathcal{S}[v]) \subseteq C(\mathcal{S}[w])$, donc, par la remarque 3.46, $v \subseteq w$. C'est donc que $v = w$. □

Proposition 3.53. *Soit X une hypercohérence localement finie série parallèle telle qu'aucun de ses singletons ne soit un coup opposant sur X. Soit $*$ un élément distingué (donc distinct de tous les éléments de X). Soit finalement $E \subseteq * \cdot (M(X))^* \cdot \{*, \varepsilon\}$ l'ensemble de mots défini par : $s = s_0 \dots s_n \in E$ ssi il existe une clique finie x de $\tilde{X}$ telle que :*

1. *$s_0 = *$;*
2. *pour $0 \leq 2k \leq n-2$, il existe $t \in x$ tel que s_{2k+1} est le premier coup d'indice impaire de t qui n'apparaît pas déjà dans $s_1 \dots s_{2k}$ et s_{2k+2} est le coup (d'indice pair) qui suit directement s_{2k+1} dans t ;*
3. *pour chaque élément t de x, chaque coup sur X différent de $|X|$ qui apparaît dans t apparaît aussi dans s ;*
4. *si $x_0 = \{p(t) \mid t \in x\}$ est une clique maximale de X alors n est pair, autrement n est impair et $s_n = *$.*

Alors S est en isomorphisme d'arbre avec $(!X)\tilde{}$.

Démonstration. Soit f l'opération définie sur les préfixes $s = s_0 \dots s_k$ d'éléments de E par :
- $f(*) = \langle \emptyset \rangle$;
- si $s_{k+1} \neq *$ alors $f(s_0 \dots s_{k+1}) = f(s_0 \dots s_k) \cdot \mathcal{S}[s_{k+1}]$ où $\mathcal{S}$ est le dernier élément de $f(s_0 \dots s_k)$;
- $f(s_0 \dots s_k *) = f(s_0 \dots s_k) \cdot \cup\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est le dernier élément de $f(s_0 \dots s_k)$.

Du fait de sa définition inductive, l'opération f préserve les longueurs des mots.

L'ensemble E est fait de mots sans répétitions. Comme X est série parallèle les éléments d'un mot $s \in E$ sont soit disjoints, soit comparables et ordonnés pour l'inclusion dans le sens inverse de leur apparition dans s. Il en va de même pour les préfixes d'éléments de E. Ainsi tout élément $\mathcal{S}$ d'un $f(s)$ pour $s \in E$ est fait d'ensembles deux à deux disjoints. De plus, si $\mathcal{S}$ est le dernier élément d'un $f(m)$ pour m préfixe d'un élément de E, alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments minimaux apparaissant dans m. Enfin, si $f(s \cdot u) = m \cdot e_1 e_2$ alors e_2 est soit de la forme $e_2 = e_1[v]$ où v est soit strictement inclus dans l'un des éléments e_1 soit disjoint de tout ces éléments, soit de la forme $e_2 \subseteq_{\text{fin}} |X|$. Dans les deux cas, on retrouve facilement l'élément u à partir de e_1 et e_2. Ceci prouve que f est injective.

L'opération f est donc un isomorphisme d'arbre entre E et son image $f(E)$.

Nous montrons maintenant que chaque élément de $f(E)$ est une suite de tranches de *avec* sauf peut-être son dernier élément qui est alors une clique finie non maximale de X.

L'ensemble vide est une tranche de *avec*. Soit maintenant s un élément de E et soit x la clique finie de $\tilde{X}$ dont il provient. Cette clique est un sous-arbre de l'arbre des tours, où les branchements n'ont lieu qu'à des indices impaires. Supposons que pour $m \cdot uv \preceq s$ on ait que le dernier élément $\mathcal{S}$ de $f(m \cdot u)$, est une tranche de *avec*. Comme $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments minimaux de $m \cdot u$, $u \in \mathcal{S}$. Si v est un coup joueur sur X alors il est justifié par u et ainsi $\mathcal{S}[v] = \mathcal{S}[v/u]$ donc $\mathcal{S}[v]$ est encore une tranche de *avec*. Si v est un coup opposant sur X il est justifié par un coup joueur w qui le précède et ce w est soit un élément de $\mathcal{S}$ auquel cas on conclut comme pour le cas où v est joueur, soit w n'est pas dans $\mathcal{S}$. Dans ce dernier cas w est nécessairement disjoint de tous les éléments de $\mathcal{S}$. Comme x est un arbre où les branchements sont sur les indices pairs et que X est série parallèle, dans ce dernier cas encore, $\mathcal{S}[v]$ est une tranche de *avec*. Ceci prouve bien que les $f(s)$ pour $s \in E$ sont tous fait de tranches de *avec*, sauf peut être leurs derniers éléments. Si $s \in E$ termine sur autre chose que $*$, par l'induction précédente, le dernier élément de $f(s)$ est une tranche de *avec*. Si $s \in E$ termine sur $*$ le dernier élément de $f(s)$ est par définition la clique finie et non maximale $\{p(t) \mid t \in x\}$.

Soit $h : f(E) \to |(!X)\tilde{}|$ l'application définie par

$$h(\mathcal{S}_0 \dots \mathcal{S}_{2k}) = \langle (C(\mathcal{S}_0), 0), \dots, (C(\mathcal{S}_{2k}), 2k) \rangle \text{ et}$$
$$h(\mathcal{S}_0 \dots \mathcal{S}_{2k} y) = \langle (C(\mathcal{S}_0), 0), \dots, (C(\mathcal{S}_{2k}), 2k), (y, 2k+1) \rangle.$$

En utilisant les lemmes 3.44, 3.50 et 3.52 par un raisonnement par préfixes, nous obtenons que h étendue aux préfixes d'éléments de E et aux parties sur $!X$ est bijective et qu'elle préserve la longueur des infs. Il en va donc de même de $f \mathbin{;} h$. Nous obtenons de la même manière que $f \mathbin{;} h$ est surjective.

La seule difficulté dans ce raisonnement provient des éléments finaux $(y, 2k+1)$. Supposons que $\mathcal{S}$ est un ensemble de singletons. Alors $C(\mathcal{S})$ est un singleton ssi $\cup\mathcal{S}$ est une clique maximale. Lorsque $\cup\mathcal{S}$ est une clique maximale on a bien défini un tour par $f \mathbin{;} g$. Si ce n'est pas un clique maximale il faut vérifier que $C(\mathcal{S}) \vdash_{!X} \cup\mathcal{S}$ et, réciproquement, que $\cup\mathcal{S}$ est le seul singleton habilité par $C(\mathcal{S})$. Ceci achèvera la preuve.

La situation est la suivante : $C(\mathcal{S})$ est strictement infiniment cohérent et c'est l'ensemble des cliques finies sur X qui contiennent la clique $\cup\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est une tranche de *avec* faite des singletons. Il suffit de montrer que si z est un élément de $C(\mathcal{S})$ alors il existe un sous-ensemble strictement infiniment incohérent de $C(\mathcal{S})$ qui contient z si et seulement si $z \cap (|X| - \cup\mathcal{S}) \neq \emptyset$.

Soit V un tel sous-ensemble de $C(\mathcal{S})$ et choisissons le maximal. Alors par le lemme 3.52, il existe une unique section strictement infiniment incohérente de V et V est la tranche de *avec* $C(\mathcal{S}[v])$. Mais $\mathcal{S}$ ne contient que des singletons donc $\mathcal{S}[v] = \mathcal{S} \uplus \{v\}$ et v est disjoint de tous les éléments de $\mathcal{S}$. L'élément z appartient à $\mathcal{S}[v]$, il intersecte donc bien $|X| - \cup\mathcal{S}$. Dans l'autre sens maintenant. Supposons que $z \cap (|X| - \cup\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Comme z est une clique et que X est série parallèle c'est qu'il existe une tour t sur X qui n'est pas dans x mais telle que $x \cup \{t\}$ est une clique et telle que $p(t) \in z$. Comme les singletons de X sont tous de polarité joueur c'est que l'avant dernier élément v de la tour t est strictement infiniment incohérent. Cet élément ne peut pas apparaître dans une tour de x, puisque $x \cup \{t\}$ ne branche que sur les coups opposant et que $\{p(t)\}$ n'appairait pas dans x. Toujours parce que X est série parallèle, c'est que v est disjoint de tous les éléments de $\mathcal{S}$ et comme $x \cup \{t\}$ est une clique, $\mathcal{S} \cup \{v\}$ est une tranche de *avec* sur X. On a alors bien un $V = C(\mathcal{S} \cup \{v\})$ qui est un sous-ensemble de $C(\mathcal{S})$ qui contient z et qui admet v comme section strictement infiniment incohérent. □

Remarques 3.54.

- En suivant la dernière partie de la preuve précédente il est possible de généraliser la description des tours du $!X$ en relaxant la condition qui veut qu'aucun singleton de X ne soit de polarité opposant.
- Comme les espaces cohérent, les hypercohérences admettent une structure exponentielle alternative, dite multi-ensembliste. Dans cette version du modèle, le *bien sûr*, noté $\underset{mh}{!}$, est défini sur les objets comme suit. Si X est une hypercohérence alors

  $$|\underset{mh}{!}X| = \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}|X| \mid \text{supp}(\mu) \in \text{Cl}(X)\}$$

  et si $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(|\underset{mh}{!}X|)$ alors $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \in \Gamma^{*\perp}(\underset{mh}{!}X)$ ssi il existe une section de $\{\text{supp}(\mu_1), \ldots, \text{supp}(\mu_n)\}$ strictement incohérente dans X. Nous revenons sur cette version des exponentielles à la fin de la section 6.4 (chapitre 6). Il est en fait possible d'établir un résultat analogue à celui de la proposition 3.53 pour cette version du *bien sûr*. Notamment on a un résultat similaire à celui de la propriété 14 pour $\underset{mh}{!}$. Sous la réserve que $\underset{mh}{!}$ préserve bien la finitude locale, l'adaptation de la proposition 3.53 consiste alors simplement en une modification du point 4 de la définition des éléments de E qui supprime la distinction faite entre le cas où x_0 est maximal et le cas où x_0 n'est pas maximal. Notamment un mot de E est toujours de longueur paire (n est toujours impair) et de dernière lettre un multi-ensemble de support x_0. Ainsi le passage à la version multi-ensembliste de l'exponentielle des hypercohérences ne modifie pas radicalement la nature de l'exponentielle *jeux* associée par déploiement.

CHAPITRE 4

Jeux polarisés à bord

« Engage le jeu, que je le gagne. »

L'analyse des deployés d'hypercohérences du chapitre précédent nous a conduit à remarquer une certaine ressemblance entre les jeux polarisés d'O. Laurent [Lau02b] et les constructions que nous obtenons sur les arbres des tours. La principale différence, outre le fait que les jeux polarisés possédent des pointeurs dont sont *a priori* dépourvus nos arbres des tours, réside dans le fait que, dans les arbres des tours, les parties terminent et que cette terminaison introduit une symétrie de traitement entre les débuts et les fins de parties, du moins au niveau des multiplicatifs.

C'est en découvrant les constructions multiplicatives des jeux polarisés que nous avons, pour la première fois, remarqué un rapprochement possible entre les jeux polarisés et les arbres de tours. Plus précisement dans les jeux polarisés le premier coup d'une partie dans un multiplicatif, disons $A \parr B$, est la paire formée d'un premier coup d'une partie dans A et d'un premier coup d'une partie dans B. Une telle idée avait été explorée par F. Lamarche ([Lam92]) mais le fait est qu'elle prend tout son sens dans le cadre d'un modèle de la logique linéaire polarisée, dans lequel les constructions multiplicatives n'ont pas à être définies sur tous les morphismes (les *stratégies*) mais seulement sur les morphismes *centraux* (les stratégies centrales). Techniquement, cette restriction permet de définir un *par* sur les morphismes tel que le *par* de deux stratégies centrales soit encore une stratégie (centrale).

Dans les arbres des tours, on retrouve cette idée d'une paire de coups pour le dernier coup d'une partie terminée dans un multiplicatif.

Nous avons donc naturellement cherché à définir un modèle de jeux pour la logique linéaire polarisée qui coïncide avec les arbres des tours. C'est ce modèle que nous présentons dans ce chapitre.

Les jeux polarisés que nous manipulons sont sans pointeurs et ils sont équipés d'une notion de *bord* qui correspond à la notion de partie terminée dans les arbres des tours. Ce bord, qui est simplement un emsemble de mots de longueurs paires, joue un rôle prépondérant dans les constructions. Ainsi, contrairement à ce qui se fait habituellement en sémantique des jeux, nous manipulons les jeux par leurs bords et non par un ensemble de parties *clos par préfixe*. Ce choix était nécessaire notamment pour obtenir l'associativité de la composition en présence de la notion de bord.

Les stratégies sont des ensembles particuliers de parties terminées (*i.e.* de mots du bord). Nous avons aussi fait le choix de présenter certaines constructions sur les stratégies, relativement usuelles en sémantique des jeux, en nous ramenant à des opérations entre mots (parties terminées).

Après avoir introduit les jeux polarisés à bord et l'essentiel des constructions sur ces jeux, nous montrons que nous avons un modèle de MALLP (le fragment sans exponentielles de la logique linéaire polarisée, LL*pol*).

Faute d'une axiomatique catégorique éprouvée pour les modèles de MALLP, nous avons fait le choix d'introduire, en toutes généralités, une notion de coupure entre stratégies, plutôt que de nous contenter de la seule composition des morphismes. Ceci nous facilite légérement le travail, notamment pour la preuve de correction du modèle.

La symétrie interne entre débuts et fins de parties nous a conduit à découvrir une propriété de *réversibilité temporelle* de notre modèle de jeux (section 4.2.2). Nous ne savons pas encore vraiment donner un sens à cette propriété.

Il est très facile *d'oublier le temps* dans notre modèle de jeux : à une petite adaptation près, il s'agit simplement de ne conserver que les coups finaux des parties du bord. Dans la section 4.2.3, nous montrons que cet oubli du temps nous permet de retrouver l'interprétation relationnelle et hypercohérente des formules et des preuves de MALLP.

Dans la dernière section, nous posons les bases d'une extension de notre modèle aux exponentielles de LL*pol*.

4.1 Jeux polarisés

Définition 4.1 (jeu polarisé). Un jeu polarisé A est un quadruplet $(\epsilon, A^{\text{O}}, A^{\text{J}}, S)$ où $\epsilon \in \{-, +\}$ est la polarité de A, où A^{O} et A^{J} sont deux ensembles disjoints et au plus dénombrables, et où S est un ensemble de mots, appelé le *bord* du jeu A, tel que si le jeu est négatif alors $S \subseteq (A^{\text{O}} \cdot A^{\text{J}})^*$ et si le jeu est positif alors $S \subseteq (A^{\text{J}} \cdot A^{\text{O}})^*$. Lorsque S ne contient pas le mot vide, on dit que le jeu est *linéaire* et sinon on dit qu'il est *affine*.

On appelle coups opposant les éléments de A^{O} et coups joueur les éléments de A^{J}. On appelle parties terminées du jeu A les éléments de S, on note $P(A)$ l'ensemble $\triangledown S_A$ et on appelle ses éléments les parties de A. On distingue les parties opposant de A, $P^{\text{O}}(A)$, qui sont les parties de A qui finissent sur un coup opposant et éventuellement la partie vide ε si A est positif et les parties joueur de A, $P^{\text{J}}(A)$ qui sont les parties qui finissent sur un coup joueur et la partie vide si A est négatif.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on commet souvent l'abus de noter simplement A l'ensemble des coups $A^{\text{O}} \cup A^{\text{J}}$ d'un jeu A. On écrit ainsi $\upharpoonleft A$ pour $\upharpoonleft(A^{\text{O}} \cup A^{\text{J}})$ ou encore $\upharpoonleft(A_1, \ldots, A_n)$ pour $\upharpoonleft(A_1^{\text{O}} \cup A_1^{\text{J}} \cup \ldots \cup A_n^{\text{O}} \cup A_n^{\text{J}})$.

Dans la suite, sauf précision contraire, une lettre minuscule désigne toujours un coup dans le jeu noté par la même lettre en majuscule. Ainsi a est un coup dans le jeu A. On notera souvent en exposant la polarité de ce coup. Ainsi a^{O} est un coup opposant dans le jeu A et a^{J} est un autre coup, de polarité joueur, dans le jeu A. Si ces lettres portent des indices c'est, selon le contexte, soit qu'elles désignent des coups différents dans un même jeu soit encore qu'elles désignent des coups dans des jeux différents distingués par les indices. Ainsi si le jeu A_i est défini, alors a_i désigne un coup dans le jeu A_i et si ce jeu n'est pas défini et que le jeu A est défini, alors a_i et a_j sont des coups dans le jeu A. Il en va de même avec les notations prime ($a, a' \in A$ ou $a \in A$ et $a' \in A'$) et seconde ($a, a'' \in A$ ou $a \in A$ et $a'' \in A''$).

On écrira parfois $p \preccurlyeq^{\text{J}} s$ pour $p \preccurlyeq s$ *et* $p \in P^{\text{J}}(A)$ et $p \preccurlyeq^{\text{O}} s$ pour $p \preccurlyeq s$ *et* $p \in P^{\text{O}}(A)$.

Définition 4.2 (bonne terminaison). Lorsque les éléments de S sont deux à deux incomparables pour l'ordre préfixe, *i.e.*

$$\forall s, s' \in S, s \neq s' \implies s \not\preccurlyeq s',$$

on dit que le jeu est *bien terminé*.

Remarque 4.3. Les seuls jeux polarisés affines bien terminées sont les jeux $(-, A^{\text{O}}, A^{\text{J}}, \{\varepsilon\})$ et $(+, A^{\text{O}}, A^{\text{J}}, \{\varepsilon\})$.

Définition 4.4 (plénitude). Un jeu polarisé est *plein* lorsque toute partie non vide est l'inf par préfixe de deux parties terminées, *i.e.*

$$\forall p \in P(A), p \neq \varepsilon \implies \exists s, s' \in S, s \wedge s' = p.$$

Définition 4.5 (stratégies). Un sous-ensemble x de $P(A)$ est *déterministe* lorsque :

$$\forall s, s' \in x, s \neq s' \implies s \wedge s' \in P^{\mathrm{J}}(A) \qquad \text{(déterminisme.)}$$

Une stratégie σ sur un jeu polarisé $A = (\epsilon_A, A^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{J}}, S_A)$ est un sous-ensemble déterministe de S_A. On note $\mathrm{St}(A)$ l'ensemble des stratégies sur A et $\mathrm{St}_{\mathrm{fin}}(A)$ l'ensemble des stratégies finies sur A.

Une stratégie σ est *saturée* lorsque :

$$\sigma = S_A \cap (\triangledown\, \sigma) \qquad \text{(saturation.)}$$

Remarques 4.6. Si σ est un sous-ensemble de S_A, en particulier si σ est une stratégie, on a toujours que $\sigma \subseteq S_A \cap (\triangledown\, \sigma)$. Vérifier la saturation revient ainsi à vérifier que $S_A \cap (\triangledown\, \sigma) \subseteq \sigma$.

Si le jeu A est bien terminé la saturation est automatiquement vérifiée.

Dans le cas d'un jeu négatif, la condition de déterminisme est équivalente à dire que $s \wedge s'$ est de longueur paire, pour toute paire $s, s' \in \sigma$.

Définition 4.7 (orthogonal). Si $A = (\epsilon_A, A^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{J}}, S_A)$ est un jeu polarisé alors A *orthogonal*, noté $A^{\perp} = (\epsilon_{A^{\perp}}, A^{\perp\mathrm{O}}, A^{\perp\mathrm{J}}, S_{A^{\perp}})$, est le jeu polarisé défini par $\epsilon_{A^{\perp}} = -\epsilon_A$, $A^{\perp\mathrm{O}} = A^{\mathrm{J}}$, $A^{\perp\mathrm{J}} = A^{\mathrm{O}}$ et $S_{A^{\perp}} = S_A$.

Définition 4.8 (connecteurs logiques 1). Si $A = (-, A^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{J}}, S_A)$ et $B = (-, B^{\mathrm{O}}, B^{\mathrm{J}}, S_B)$ sont deux jeux négatifs *disjoints* (*i.e.* si $A^{\mathrm{O}} \cup A^{\mathrm{J}}$ et $B^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$ sont deux ensembles disjoints) alors :

– le jeu $\top$ est le jeu négatif linéaire

$$(-, \emptyset, \emptyset, \emptyset); \qquad (\top)$$

– le jeu $\perp$ est le jeu négatif linéaire

$$(-, \{*\}, \{*'\}, \{**'\}); \qquad (\perp)$$

– si A et $\perp$ sont disjoints le *décalage positif* de A, noté $\downarrow A$, est le jeu positif

$$(+, A^{\mathrm{O}} \cup \{*'\}, A^{\mathrm{J}} \cup \{*\}, \{*\} \cdot S_A \cdot \{*'\}); \qquad (\downarrow A)$$

– le *avec* de A et B, $A \mathbin{\&} B$, est le jeu négatif

$$(-, A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}}, S_A \cup S_B); \qquad (A \mathbin{\&} B)$$

– le *par* de A et B, $A \parr B$, est le jeu négatif

$$(-, A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{O}} \cup (A^{\mathrm{O}} \times B^{\mathrm{O}}), A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}} \cup (A^{\mathrm{J}} \times B^{\mathrm{J}}), S) \qquad (A \parr B)$$

où

$$S = \{(a, b) \cdot w \cdot (a', b') \mid w \in ((A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}}) \cdot (A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{O}}))^*, \\ a \cdot (w{\upharpoonright}A) \cdot a' \in S_A \text{ et } b \cdot (w{\upharpoonright}B) \cdot b' \in S_B\}.$$

Cette définition s'étend à des jeux non disjoints de la manière suivante : en posant $A_l^{\mathrm{O}} = \{l\} \times A^{\mathrm{O}}$, $A_l^{\mathrm{J}} = \{l\} \times A^{\mathrm{J}}$, $B_r^{\mathrm{O}} = \{r\} \times B^{\mathrm{O}}$ et $B_r^{\mathrm{J}} = \{r\} \times B^{\mathrm{J}}$ on obtient deux jeux A_l et B_r, *copies disjointes* de A et de B, auxquels on peut alors appliquer les construction $\&$ ou $\parr$. Et de même lorsque A et $\perp$ ne sont pas disjoints on pose $\downarrow A = \downarrow A_l$.

Définition 4.9 (connecteurs logiques 2). Si A et B sont des jeux positifs, le *décalage négatif* de A, noté $\uparrow A$ est le jeu $(\downarrow(A^{\perp}))^{\perp}$, le jeu A *plus* B, noté $A \oplus B$, est le jeu $(A^{\perp} \mathbin{\&} B^{\perp})^{\perp}$ et le jeu A *tenseur* B, noté $A \otimes B$, est le jeu $(A^{\perp} \parr B^{\perp})^{\perp}$. Si A est un jeu positif et B est un jeu négatif alors $A \multimap B$ est le jeu négatif $A^{\perp} \parr B$.

Remarque 4.10. On a $s{\upharpoonright}(A^{\perp}) = s{\upharpoonright}A$ et $s{\upharpoonright}(\uparrow A) = * \cdot s{\upharpoonright}A \cdot *'$.

Définition 4.11 (connecteurs ésotériques). Soient A et B des jeux négatifs disjoints.

– Le *tenseur négatif* de A et B, $A \odot B$ est le jeu négatif $(-, A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}}, S)$ où $S = \{w \in ((A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{O}}) \cdot (A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}}))^*, w{\upharpoonright}A \in S_A \text{ et } w{\upharpoonright}B \in S_B\}$.
– La *flèche linéaire négative* de A et B, $A {\multimap\!\!\!\triangleright} B$ est le jeu négatif $(-, A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}, A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}, S)$ où $S = \{w \in ((A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}) \cdot (A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}))^*, w{\upharpoonright}A \in S_A \text{ et } w{\upharpoonright}B \in S_B\}$.
– Le *un négatif*, $\wr$, est le jeu négatif affine $(-, \emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\})$.

De même, on généralise ces définitons au cas où les jeux A et B ne sont pas disjoints en faisant des copies disjointes de A et B avant d'appliquer les constructions précédentes.

On étend ces définitions respectivement à un $\&$, à un $\parr$, à un $\odot$, à un $\oplus$ et à un $\otimes$ n-aire, dont la version unaire laisse, par convention, le jeu à l'identique[1]. Les résultats d'associativité de la proposition 4.36 montrent le bien fondé de ce choix.

Remarque 4.12. Si E et F sont deux ensembles de mots de longueurs paires sur des alphabets disjoints A et B alors $E \odot F$, où $\odot$ est l'opération sur les ensembles de mot définie page 44, est l'ensemble des mots reconnus par l'automate de la figure 4.1 et dont les projections sur A et sur B sont respectivement un élément de E et un élément de F.

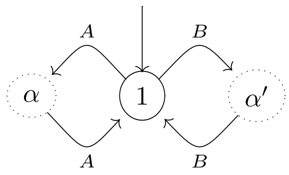


FIG. 4.1 – automate de $(A \cdot A)^* \odot (B \cdot B)^*$

Proposition 4.13. *L'action des constructions multiplicatives ($\parr$, $\otimes$, $\odot$ et ${\multimap\!\!\!\triangleright}$) sur les parties terminées peut être décrite en utilisant les opérations $\odot$ et $\otimes$ sur les ensembles de mots définies page 44. On a $S_{A\otimes B} = S_A \otimes S_B$, $S_{A\parr B} = S_A \otimes S_B$, $S_{A\odot B} = S_A \odot S_B$ et $S_{A{\multimap\!\!\!\triangleright}B} = \{b \cdot (S_A \odot m) \cdot b' \mid b \cdot m \cdot b' \in S_B\}$.*

Démonstration. Il est clair que les mots obtenues par ces opérations sont bien, dans chaque cas, des parties terminées dans le jeu multiplicatif correspondant, puisqu'elles respectent l'alternance en polarité et la bonne projection. Il reste à montrer que toute partie terminée dans un multiplicatif est bien de cette forme. Nous le faisons pour la flèche linéaire négative. Les mots de l'ensemble $\{b \cdot (S_A \odot m) \cdot b' \mid b \cdot m \cdot b' \in S_B\}$ sont des éléments de $B^{\mathrm{O}} \cdot \{A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}}, B^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{O}}\}^* \cdot B^{\mathrm{J}}$ dont les projections sur A et sur B sont respectivement des parties terminées des jeux A et B. Il suffit donc de montrer que les parties terminées de $S_{A{\multimap\!\!\!\triangleright}B}$ sont acceptées par l'automate de la figure 4.2 pour montrer que les parties terminées de $A{\multimap\!\!\!\triangleright}B$ sont bien des éléments de $\{b \cdot (S_A \odot m) \cdot b' \mid b \cdot m \cdot b' \in S_B\}$. Soit $s \in S_{A{\multimap\!\!\!\triangleright}B}$. Nous construisons un nouvel automate reconnaissant s et nous montrons qu'il s'agit bien de l'automate de la figure 4.2. Chaque état de notre nouvel automate sera donné par la polarité dans $A{\multimap\!\!\!\triangleright}B$ de la partie déjà reconnue et par les polarités de ses projections sur A et B. Ainsi l'état initial est $(P^{\mathrm{J}}(A{\multimap\!\!\!\triangleright}B), P^{\mathrm{J}}(A), P^{\mathrm{J}}(B))$ puisque la partie déjà reconnue et ses deux projections sont les parties vides. Le coup suivant

[1]Un peu abusif au cas où le jeu est affine et où le connecteur est le $\parr$ ou le $\otimes$, puisque dans ce cas on devrait obtenir le même jeu mais sans le mot vide (donc linéaire).

est alors un coup opposant dans $A \multimap B$ et ça ne peut pas être un coup joueur de A puisque c'est à l'opposant de jouer dans A. C'est donc un coup opposant de B. Ce qui nous mène dans un deuxième état $(P^{\mathsf{O}}(A \multimap B), P^{\mathsf{J}}(A), P^{\mathsf{O}}(B))$. Le coup suivant dans s est joueur c'est donc soit un coup opposant dans A soit un coup joueur dans B. Dans le premier cas on passe dans un troisième état $(P^{\mathsf{J}}(A \multimap B), P^{\mathsf{O}}(A), P^{\mathsf{O}}(B))$ dans le deuxième cas l'automate repasse dans le premier état $(P^{\mathsf{J}}(A \multimap B), P^{\mathsf{J}}(A), P^{\mathsf{J}}(B))$ dont nous avons déjà exploré les possibilités. Dans le troisième état c'est à l'opposant de jouer dans $A \multimap B$ mais c'est au joueur de jouer dans B le coup suivant est donc nécessairement un coup joueur dans A, ce qui nous ramène dans le deuxième état. Nous avons ainsi exploré tout les états possibles et il reste le cas de sortie qui est nécessairement le premier état, étant donné que les projections de s doivent être des parties terminées de A et B donc de polarité joueur dans A et dans B. L'automate construit est donc bien celui de la figure 4.2, ce qui termine la preuve. $\square$

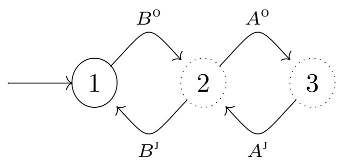


FIG. 4.2 – automate de $A \multimap B$

Ce que nous présentons sous forme d'automates est connu dans les jeux sous le nom de conditions de *switching* ou de *basculement*. Ces conditions, que nous avons déjà rencontrées à propos du déploiement en tours d'un multiplicatif, disent quel joueur a le droit de changer de sous-jeu dans un jeu obtenu par construction (ici multiplicative). Ainsi dans la flèche linéaire négative et dans le *par*, dont nous représentons l'automate dans la figure 4.3, ce joueur est *le Joueur* (celui qui *joue* les coups joueur), on dit alors que le basculement est joueur, et dualement dans le tenseur négatif et dans le tenseur ce joueur est l'opposant (le basculement est opposant).

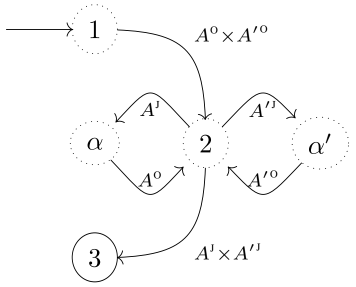


FIG. 4.3 – automate du *par*

Nous établissons trois propositions concernant la linéarité, la bonne terminaison et la plénitude des jeux obtenus par les constructions logiques que nous venons de définir.

Proposition 4.14 (linéarité). *Soient A et B deux jeux négatifs. Alors :*
- *le jeu $A^{\perp}$ est un jeu linéaire ssi A est un jeu linéaire ;*
- *le jeu $\downarrow A$ est toujours un jeu linéaire ;*
- *le jeu $A \mathbin{\&} B$ est un jeu linéaire ssi A et B sont des jeux linéaires ;*
- *le jeu $A \parr B$ est toujours un jeu linéaire ;*
- *le jeu $A \odot B$ est un jeu linéaire ssi au moins l'un des deux jeux A ou B est linéaire ;*
- *le jeu $A \multimap B$ est linéaire ssi B est linéaire.*

Proposition 4.15 (bonne terminaison). *Soient A et B deux jeux négatifs. Alors :*
- *les jeux $\top$ et $\perp$ sont bien terminés ;*

– *le jeu $A^\perp$ est bien terminé ssi A est bien terminé ;*
– *le jeu $\downarrow A$ est toujours bien terminé ;*
– *le jeu $A \,\&\, B$ est bien terminé ssi A et B sont bien terminés ;*
– *si $A^{\mathrm{O}} \cup A^{\mathrm{J}}$, $B^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$ et $(A^{\mathrm{O}} \times B^{\mathrm{O}}) \cup (A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{J}})$ sont deux à deux disjoints alors $A \parr B$ est bien terminé ;*
– *le jeu $A \odot B$ est bien terminé ssi A et B sont bien terminés ;*
– *le jeu $A \multimap B$ est bien terminé ssi B est bien terminé.*

La démonstration de ces deux dernières proposition est une vérification immédiate.

Proposition 4.16 (plénitude). *Les jeux $\top$ et $\int$ sont pleins et les constructions $^\perp$, $\&$, $\odot$ et $\multimap$ préservent la plénitude.*

Démonstration. La vérification pour $\top$, $\int$, $^\perp$ et $\&$ est directe. Nous faisons la preuve pour la flèche linéaire négative. La preuve pour le tenseur négatif est sensiblement la même. Soient $s \in S_{A \multimap B}$ et p tel que $s = p \cdot c \cdot w$ pour un certain coup c dans $A \multimap B$. Il y a deux cas. Soit c est un coup dans A. Comme $p{\upharpoonright}A \prec s{\upharpoonright}A$ avec $s{\upharpoonright}A \in S_A$ et que A est plein, il existe $s_1 \in S_A$ tel que $p{\upharpoonright}A = s_1 \wedge (s{\upharpoonright}A)$. Le mot $s' = p \cdot [s_1 - (p{\upharpoonright}A)] \cdot [(s{\upharpoonright}B) - (p{\upharpoonright}B)]$ est accepté par l'automate de la figure 4.2 et ses projections sur A et sur B sont des parties terminées, respectivement dans les jeux A et B. Ce mot s' est donc un élément de $S_{A \multimap B}$ et de plus on a bien $p = s \wedge s'$. Dans l'autre cas c est un coup dans B. Par plénitude de B, il existe alors un $s_2 \in S_B$ tel que $s_2 \wedge (p{\upharpoonright}B) = s{\upharpoonright}B$. On pose soit $s' = p \cdot [(s{\upharpoonright}A) - (p{\upharpoonright}A)] \cdot [s_2 - (p{\upharpoonright}B)]$ si $c \in B^{\mathrm{J}}$ soit $s' = p \cdot b' \cdot [(s{\upharpoonright}A) - (p{\upharpoonright}A)] \cdot [s_2 - ((p{\upharpoonright}B) \cdot b')]$ si $c \in B^{\mathrm{O}}$ et si b' est le coup de B qui suit $p{\upharpoonright}B$ dans s_2. On définit ainsi un mot s' tel que $s \wedge s' = p$. Dans les deux cas, le mot s' est accepté par l'automate de la figure 4.2 et ses projections sont des parties terminées dans A et dans B. Donc, dans les deux cas, s' est une partie terminée de $A \multimap B$. Ce qui termine la preuve. $\square$

Nous introduisons une opération de *coupure atomique* entre parties terminées qui servira à interpréter la coupure dans les jeux. Cette opération servira aussi à définir la composition dans la catégorie des jeux négatifs mais elle est définie de façon plus générale que ne le sera la composition.

Définition 4.17 (coupure atomique). Soient $A, B, C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_n$ des jeux négatifs deux à deux disjoints. Soient $s \in S_{A \multimap (B \parr C_1 \parr \ldots \parr C_k)}$ et $s' \in S_{B \multimap (C_{k+1} \parr \ldots \parr C_n)}$ tels que $s{\upharpoonright}B = s'{\upharpoonright}B$ on définit alors $[\![s \fatsemi s']\!]_B \in S_{A \multimap (C_1 \parr \ldots \parr C_n)}$, la *coupure atomique* de s et de s' sur B, en posant : si $s = \varepsilon$,[2] alors $[\![s \fatsemi s']\!]_B = s'$, sinon et si t est un mot qui ne contient pas de coups de B (*i.e.* $t{\upharpoonright}B = \varepsilon$), alors

$$\begin{aligned}[\![(b^{\mathrm{O}}, c_1, \ldots, c_k) \cdot w \fatsemi (c_{k+1}, \ldots, c_n) \cdot t \cdot b^{\mathrm{O}} \cdot w']\!]_B \\ = (c_1, \ldots, c_n) \cdot t \cdot f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot w')\end{aligned} \tag{4.1}$$

où

$$f_B(b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}} \cdot w, b^{\mathrm{J}} \cdot t \cdot b^{\mathrm{O}} \cdot w') = t \cdot f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot w') \tag{4.2}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot t \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w') = t \cdot f_B(b^{\mathrm{J}} \cdot w, b^{\mathrm{J}} \cdot w') \tag{4.3}$$

$$f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot t \cdot (b^{\mathrm{J}}, c_1, \ldots, c_k), b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}} \cdot w' \cdot (c_{k+1}, \ldots, c_n)) = t \cdot w' \cdot (c_1, \ldots, c_n). \tag{4.4}$$

Lorsque $k = 0$ la coupure atomique est encore appelée *composition atomique*. Cette définition s'étend trivialement à un $s \in S_{B \parr C_1 \parr \ldots \parr C_k}$ produisant un $[\![s \fatsemi s']\!]_B \in S_{C_1 \parr \ldots \parr C_n}$ en prenant $A = \int$.

Les projections de $[\![s \fatsemi s']\!]_B$ sur A et sur chacun des C_i pour $1 \leq i \leq k$ sont égales aux projections de s sur ces jeux. de même les projections de $[\![s \fatsemi s']\!]_B$ sur chacun des C_i pour $k + 1 \leq i \leq n$ sont égales aux projections de s' sur ces jeux. Ainsi les projections de

[2]Dans ce cas $k = 0$ puisque un *par* de jeux négatifs ne contient jamais la partie terminée ε.

$[\![s \mathbin{;} s']\!]_B$ sur A et sur chacun des C_i pour $1 \leq i \leq n$ sont des parties terminées dans les jeux correspondant.

On vérifie facilement que $[\![s \mathbin{;} s']\!]_B$ est un mot accepté par l'automate de $A \multimap D$ où $D = C_1 \parr \ldots \parr C_n$ et que sa projection sur $C_1 \parr \ldots \parr C_n$ est acceptée par l'automate de $C_1 \parr \ldots \parr C_n$.

On en déduit que $[\![s \mathbin{;} s']\!]_B$ est une partie terminée de $A \multimap (C_1 \parr \ldots \parr C_n)$.

Remarque 4.18. Soit D un ensemble de coups. Si $s' \upharpoonright D = \varepsilon$ alors $s \upharpoonright D = [\![s \mathbin{;} s']\!]_B \upharpoonright D$ et si $s \upharpoonright D = \varepsilon$ alors $s' \upharpoonright D = [\![s \mathbin{;} s']\!]_B \upharpoonright D$.

Lemme 4.19 (entrelacement synchrone). *Soit un mot m sur un alphabet $A \cup B$ et un mot m' sur un alphabet $B \cup C$ tels que A et C sont disjoints. Si $m \upharpoonright B = m' \upharpoonright B'$ alors il existe un mot m'' (non nécessairement unique) sur l'alphabet $A \cup B \cup C$ tel que $m'' \upharpoonright (A, B) = m$ et $m'' \upharpoonright (B, C) = m'$. On dit alors que m'' est un* entrelacement synchrone *de m et m'.*

Démonstration. On fait une preuve par récurrence sur la longueur du mot $p = m \upharpoonright B = m' \upharpoonright B$. Si cette longueur est nulle alors $m'' = m \cdot m'$ convient. Supposons le lemme prouvé pour une longueur n de p et soient m et m' tels que que cette longueur soit $n + 1$. Alors il existe un mot q et une lettre $b \in B$ tels que $p = q \cdot b$. Il existe alors des mots w_1 et w_2 tels que $m = w_1 \cdot b \cdot w_2$ et $w_1 \upharpoonright B = q$. De même, il existe des mots w'_1 et w'_2 tels que $m' = w'_1 \cdot b \cdot w'_2$ et $w'_1 \upharpoonright B = q$. De plus $w_2 \upharpoonright B = w'_2 \upharpoonright B = \varepsilon$. Ainsi $w_2 \upharpoonright (B, C) = w'_2 \upharpoonright (A, B) = \varepsilon$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à w_1 et w'_1 et on a ainsi un mot w'' tel que $w'' \upharpoonright (A, B) = w_1$ et $w'' \upharpoonright (B, C) = w'_1$. On forme alors le mot $m'' = w'' \cdot b \cdot w_2 \cdot w'_2$. C'est un mot sur $A \cup B \cup C$ et ses projections sur $A \cup B$ et $B \cup C$ sont bien $w_1 \cdot b \cdot w_2 = m$ et $w'_1 \cdot b \cdot w'_2 = m'$, ce qui conclut. □

On va utiliser la composition atomique pour définir la composition dans ce qui sera la catégorie des jeux négatifs. Dans ce cadre, il existe une notion de *témoin de composition* correspondant à la notion d'entrelacement synchrone, introduite par la proposition suivante, pour laquelle on montre un lemme (d'existence et) d'unicité (lemme 4.21). Ce résultat et ce lemme sont standards en théorie des jeux. L'introduction des témoins dans le cadre général de la coupure atomique n'est pas nécessaire de plus une telle généralité supposerait une discipline de projection des parties plus subtile que la simple projection des mots. Nous en faisons donc l'économie.

Proposition 4.20 (témoins de la composition atomique). *Soient A, B, C des jeux négatifs deux à deux disjoints. Soient $s \in S_{A \multimap B}$ et $s' \in S_{B \multimap C}$ tels que $s \upharpoonright B = s' \upharpoonright B$. Un témoin de la composition de s et s' est un mot m sur un ensemble de coups D tel que $m \upharpoonright (A \multimap B) = s$, et $m \upharpoonright (B \multimap C) = s'$. On a alors $m \upharpoonright (A \multimap C) = [\![s \mathbin{;} s']\!]_B \in S_{A \multimap C}$ et un tel témoin existe toujours.*

Lemme 4.21 (existence et unicité des témoins). *Plus précisément, soit $[\![s \mathbin{;} s']\!]$ défini par : si $s = \varepsilon$ alors $[\![s \mathbin{;} s']\!] = s'$, et sinon, si t est un mot qui ne contient pas de coups de B, alors :*

$$[\![b^{\mathsf{O}} \cdot w \mathbin{;} c \cdot t \cdot b^{\mathsf{O}} \cdot w']\!] = c \cdot t \cdot g(b^{\mathsf{O}} \cdot w, b^{\mathsf{O}} \cdot w') \tag{4.5}$$

où

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad g(b^{\mathsf{O}} \cdot t \cdot b^{\mathsf{J}} \cdot w, b^{\mathsf{O}} b^{\mathsf{J}} \cdot w') = b^{\mathsf{O}} \cdot t \cdot g(b^{\mathsf{J}} \cdot w, b^{\mathsf{J}} \cdot w') \tag{4.6}$$

$$g(b^{\mathsf{J}} b^{\mathsf{O}} \cdot w, b^{\mathsf{J}} \cdot t \cdot b^{\mathsf{O}} \cdot w') = b^{\mathsf{J}} \cdot t \cdot g(b^{\mathsf{O}} \cdot w, b^{\mathsf{O}} \cdot w') \tag{4.7}$$

$$g(b^{\mathsf{O}} \cdot t \cdot b^{\mathsf{J}}, b^{\mathsf{O}} b^{\mathsf{J}} \cdot w \cdot c) = b^{\mathsf{O}} \cdot t \cdot b^{\mathsf{J}} \cdot w \cdot c. \tag{4.8}$$

alors $[\![s \mathbin{;} s']\!]$ est un témoin de la composition de s et de s' et de plus tout témoin m de cette composition est tel que $m \upharpoonright (A, B, C) = [\![s \mathbin{;} s']\!]$. En particulier, $m \upharpoonright (A, B, C)$ est reconnu par l'automate de la figure 4.4.

Démonstration de la proposition et du lemme. Par construction, il est immédiat de vérifier que $[\![s \mathbin{;} s']\!]$ est un témoin de la composition de s et de s' et que $[\![s \mathbin{;} s']\!] \upharpoonright (A \multimap C) = [\![s \mathbin{;} s']\!]_B$. Soit maintenant un témoin m de cette composition. Il faut montrer que $m \upharpoonright (A, B, C) = [\![s \mathbin{;} s']\!]$

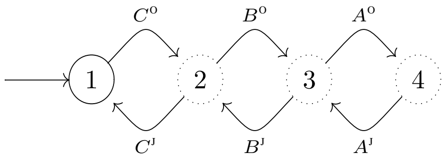
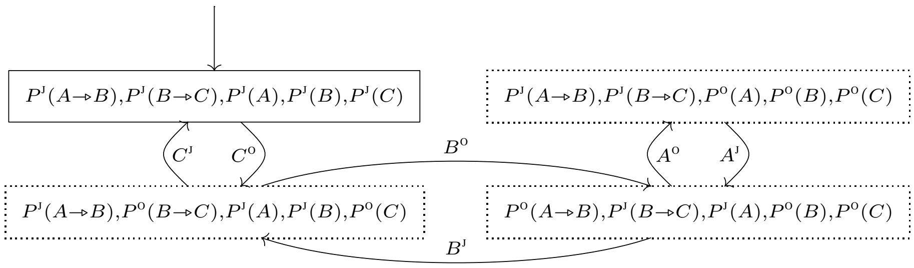


FIG. 4.4 – automate des témoins

(ce qui suffira pour avoir $m\upharpoonright(A \multimap C) = [\![s \fatsemi s']\!]_B$). Soit $m' = m\upharpoonright(A, B, C)$. En fait on montre que m' ne contient pas de facteurs de la forme ac ou ca. Comme les projections de m' et de $[\![s \fatsemi s']\!]$ sur $A \multimap B$ et sur $B \multimap C$ sont égales on en déduit l'égalité avec $[\![s \fatsemi s']\!]$. On établit que m' ne contient pas de facteurs de cette forme en prouvant la dernière partie du lemme. On construit un automate qui reconnaît les mots de $(A^{O} \cup A^{J} \cup B^{O} \cup B^{J} \cup C^{O} \cup C^{J})^*$ qui se projettent sur des parties de $A \multimap B$ et de $B \multimap C$. Un tel automate doit vérifier l'alternance opposant-joueur pour chacune des projections sur $A \multimap B$, $B \multimap C$, A, B, C. On considère l'état opposant/joueur de chacune des projections précédente pour chacun des états de l'automate construit. Dans son état initial cette configuration est celle des projections du mot vide, c'est à dire : $P^{J}(A \multimap B), P^{J}(B \multimap C), P^{J}(A), P^{J}(B), P^{J}(C)$. Par alternance, respectivement dans A, B et C, les transitions possibles sont alors A^{O}, B^{O} et C^{O}. Mais, par alternance dans $B \multimap C$, ça ne peut pas être un transition B^{O} et, par alternance dans $A \multimap B$, ça ne peut pas être une transition A^{O}. La seule possibilité est donc une transition C^{O} et le nouvel état est alors $P^{J}(A \multimap B), P^{O}(B \multimap C), P^{J}(A), P^{J}(B), P^{O}(C)$. Comme la projection sur A est joueur, il n'est pas possible de faire une transition A^{J} et, comme la projection sur $A \multimap B$ est aussi joueur, il n'est pas possible de faire une transition A^{O} ou B^{J}. Ainsi il y a deux transitions possibles soit retourner dans l'état initial par C^{J} soit effectuer une transition B^{O}. En suivant cette dernière transition on se retrouve dans un nouvel état $P^{O}(A \multimap B), P^{J}(B \multimap C), P^{J}(A), P^{O}(B), P^{O}(C)$. Comme la projection sur C est opposant, il n'est pas possible de faire une transition C^{O} et, comme la projection sur $B \multimap C$ est joueur il n'est pas possible de faire les transitions C^{J} ou B^{O}. Ainsi soit on retourne dans l'état précédent par une transition B^{J}, soit on passe, par la transition A^{O}, dans un nouvel et dernier état $P^{J}(A \multimap B), P^{J}(B \multimap C), P^{O}(A), P^{O}(B), P^{O}(C)$ que l'on ne peut quitter que par la transition A^{J} qui nous ramène à l'état précédent. Finalement on obtient l'automate :



qui est bien isomorphe à celui de la figure 4.4. □

Proposition 4.22 (associativité atomique 1). *Soient A, B, C, D des jeux négatifs deux à deux disjoints. Si $s \in S_{A \multimap B}$, $s' \in S_{B \multimap C}$ et $s'' \in S_{B \multimap D}$ sont tels que $s\upharpoonright B = s'\upharpoonright B$ et $s'\upharpoonright C = s''\upharpoonright C$ alors*

$$[\![[\![s \fatsemi s']\!]_B \fatsemi s'']\!]_C = [\![s \fatsemi [\![s' \fatsemi s'']\!]_C]\!]_B \tag{4.9}$$

Démonstration. Considérons $t = [\![[\![s \fatsemi s']\!]_B \fatsemi s'']\!]$. Comme $t\upharpoonright B = \varepsilon$, $[\![s \fatsemi s']\!]\upharpoonright D = \varepsilon$ et $t\upharpoonright(A, C) = [\![s \fatsemi s']\!]\upharpoonright(A, C)$, par le lemme 4.19, il existe un mot t' tel que $t'\upharpoonright(A, B, C) = [\![s \fatsemi s']\!]$. On a alors $t'\upharpoonright(A, B) = s$, $t'\upharpoonright(B, C) = s'$ et $t'\upharpoonright(C, D) = s''$ donc, par le lemme 4.21, $t'\upharpoonright(B, C, D) = [\![s' \fatsemi s'']\!]$ d'où $t'\upharpoonright(B, D) = [\![s' \fatsemi s'']\!]_C$ et donc $t'\upharpoonright(A, B, D) = [\![s \fatsemi [\![s' \fatsemi s'']\!]_C]\!]$ d'où finalement $[\![[\![s \fatsemi s']\!]_B \fatsemi s'']\!]_C = t\upharpoonright(A, D) = t'\upharpoonright(A, D) = [\![s \fatsemi [\![s' \fatsemi s'']\!]_C]\!]_B$. □

Définition 4.23 (centralité atomique). Une partie terminée de $A \multimap B$ est dite centrale si son premier coup joueur est un coup de A^{O} et si son dernier coup opposant est un coup de A^{J}.

Autrement dit, les parties centrales de $A \multimap B$ sont soit la partie terminée vide, soit les parties terminées de la forme $b^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{O}} \dots a^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{J}}$ de $S_{A \multimap B}$.

Proposition 4.24 (stabilité de la centralité atomique). *Si s et s' sont des parties centrales alors $[\![s \fatsemi s']\!]_B$ est encore une partie centrale.*

La preuve est immédiate.

Proposition 4.25 (identités). *Pour chaque jeu négatif A, on pose*

$$I_A = \{s \in S_{A_l \multimap A_r} \mid \forall p \preccurlyeq^{\mathrm{J}} s, p{\upharpoonright}(A_l) = p{\upharpoonright}(A_r)\}$$

(où A_l et A_r sont deux copies disjointes de A, voir la remarque 4.26). I_A est alors une stratégie centrale de $A_l \multimap A_r = A \multimap A$. De plus, si $A, B, B_1, \dots, B_n$ sont des jeux négatifs et si $s \in I_A$ alors : si $s' \in S_{A \multimap B}$ alors $[\![s \fatsemi s']\!]_A = s'$ et si $s' \in S_{B \multimap (A \parr B_1 \parr \dots \parr B_n)}$ alors $[\![s' \fatsemi s]\!]_A = s'$.

Cette proposition est prouvée ci-dessous en même temps que le lemme 4.27.

Remarque 4.26. Pour définir l'identité sur A, nous devons former le jeu $A \multimap A$, et cela n'est possible qu'en délocalisant A en deux copies disjointes de A :

$$A_l = (-, A^{\mathrm{O}} \times \{l\}, A^{\mathrm{J}} \times \{l\}, \{s \times \{l\} \mid s \in S_A\}) \text{ et}$$
$$A_r = (-, A^{\mathrm{O}} \times \{r\}, A^{\mathrm{J}} \times \{r\}, \{s \times \{r\} \mid s \in S_A\})$$

(comme dans la proposition 4.25). Ceci signifie que nous ne sommes pas vraiment capable de parler d'une stratégie de $A \multimap A$ comme d'une opération allant de A dans A, mais seulement comme d'une opération de A_l dans A_r. Ce problème est standard en sémantique des jeux. il est possible de l'éviter en adaptant notamment la composition de manière à ne composer que des parties terminées de $A_l \multimap B_r$ avec des parties terminées de $B_l \multimap C_r$. Mais ceci introduirait une surcharge de définitions et de notations dont nous préférons faire, ici, l'économie. Nous commettons donc l'abus de considérer que l'identité est définie comme une stratégie de $A_l \multimap A_r$ mais qu'elle peut s'utiliser, au besoin, comme une stratégie de $A \multimap A_r$ ou de $A_l \multimap A$.

Lemme 4.27 (identités). *Pour tout jeu négatif A on a : $I_A = \{\mathrm{id}(s) \mid s \in S_A\}$ où $\mathrm{id}(a^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{J}} \cdot w) = (r, a^{\mathrm{O}})(l, a^{\mathrm{O}})(l, a^{\mathrm{J}})(r, a^{\mathrm{J}}) \cdot \mathrm{id}(w)$ et $\mathrm{id}(\varepsilon) = \varepsilon$.*

La définition de I_A donnée dans la proposition 4.25 et l'égalité établie dans ce lemme sont des résultats standards. C'est aussi le cas pour l'égalité $[\![s \fatsemi s']\!]_A = s'$ de la proposition 4.25. L'égalité $[\![s' \fatsemi s]\!]_A = s'$ est une généralisation d'un résultat standard aux cas où cette coupure n'est pas forcément une composition. Sa vérification est immédiate.

Proposition 4.28 (catégorie des jeux négatifs). *Pour chaque A, B, C jeux négatifs, pour chaque stratégie σ de $A \multimap B$ et pour chaque stratégie τ de $B \multimap C$ on pose :*

$$\sigma \fatsemi \tau = \{[\![s \fatsemi s']\!]_B \mid s \in \sigma, s' \in \tau \text{ et } s{\upharpoonright}B = s'{\upharpoonright}B\}.$$

On définit ainsi une catégorie $\mathbf{JN}$ *ayant pour objets les jeux négatifs pour morphismes entre jeux négatifs A et B les stratégies de $A \multimap B$ (notation $\sigma : A \multimap B$), pour identités les I_A, et pour composition $\fatsemi$.*

Lorsque toutes les parties d'un morphisme de jeu négatif sont centrales ont dit que ce morphisme est central ou encore que c'est une stratégie centrale (notation $\sigma : A \dot{\multimap} B$). La catégorie des jeux négatifs et des morphismes centraux forme une sous-catégorie $\mathbf{JNC}$ *de la catégorie des jeux négatifs.*

Démonstration. L'associativité de la composition est une conséquence directe de la proposition 4.22. Le fait que les identités sont des identités de la catégorie est établie par la proposition 4.25.

On montre que la composition de deux stratégies est une stratégie. Soient $s_1, s_2 \in \sigma$, $s'_1, s'_2 \in \tau$ tels que $s_1{\restriction}B = s'_1{\restriction}B$ et $s_2{\restriction}B = s'_2{\restriction}B$ il faut montrer que

$$u = [\![s_1 \fatsemi s'_1]\!]_B \wedge [\![s_2 \fatsemi s'_2]\!]_B$$

est de longueur paire. Si $[\![s_1 \fatsemi s'_1]\!]_B = [\![s_2 \fatsemi s'_2]\!]_B$ c'est fini. Supposons que ce n'est pas le cas. On a alors $[\![s_1 \fatsemi s'_1]\!] = w \cdot m_1 \cdot t_1$ et $[\![s_2 \fatsemi s'_2]\!] = w \cdot m_2 \cdot t_2$ pour m_1 et m_2 coups sur A, B ou C avec $m_1 \neq m_2$. Ces deux mots sont reconnus par l'automate de la figure 4.4. Considérons l'état atteint par cet automate sur l'entrée w. Si c'est l'état 1 c'est que $m_1, m_2 \in C^{\mathsf{O}}$ et dans ce cas $w{\restriction}(A{\multimap}C)$ est égal à $[\![s_1 \fatsemi s'_1]\!]_B \wedge [\![s_2 \fatsemi s'_2]\!]_B$ et est de longueur paire. De même si c'est l'état 4 : on a alors $m_1, m_2 \in A^{\mathsf{J}}$ et ainsi $w{\restriction}(A{\multimap}C)$ est égal à $[\![s_1 \fatsemi s'_1]\!]_B \wedge [\![s_2 \fatsemi s'_2]\!]_B$ qui est alors de longueur paire. Si c'est l'état 2 alors $m_1, m_2 \in B^{\mathsf{O}} \cup C^{\mathsf{J}}$ et $w \cdot m_i{\restriction}(B{\multimap}C) = w{\restriction}(B{\multimap}C) \cdot m_i$ pour $i = 1, 2$. Mais, comme τ est une stratégie $w{\restriction}(B{\multimap}C)\cdot m_1 \wedge w{\restriction}(B{\multimap}C)\cdot m_2$ est de longueur paire et c'est donc que $m_1 = m_2$ ce qui est une contradiction. De même si c'est l'état 3. En effet, dans ce cas $m_1, m_2 \in A^{\mathsf{O}} \cup B^{\mathsf{J}}$ et $w\cdot m_i{\restriction}(A{\multimap}B) = w{\restriction}(A{\multimap}B)\cdot m_i$ pour $i = 1, 2$ et, σ étant une stratégie, $w{\restriction}(A{\multimap}B)\cdot m_1 \wedge w{\restriction}(A{\multimap}B)\cdot m_2$ est de longueur paire d'où à nouveau la contradiction $m_1 = m_2$. Ce qui achève de prouver que la composée de deux stratégies est une stratégie.

Par ailleurs les identités sont centrales (lemme 4.27) et la stabilité de la centralité par composition est établie par la proposition 4.24. □

Proposition 4.29. *Si f est une stratégie dans le jeu $A{\multimap}B$, pour A et B jeux négatifs, et si x est une stratégie de A alors*

$$x \fatsemi f = \{s{\restriction}B \mid s \in f \textit{ et } s{\restriction}A \in x\}$$

est une stratégie de B.

Cette égalité est une conséquence directe de la définition de la composition.

Définition 4.30 (sous-catégories de JN). La catégorie des jeux négatifs affines $\mathbf{JNA}$ est la sous-catégorie de la catégorie $\mathbf{JN}$ des jeux négatifs dont tous les objets sont affines (c'est-à-dire tels que la partie vide est dans le bord) et des morphismes contenant la partie vide, que nous appellerons parfois *morphismes affines* (clairement l'identité sur un jeu affine est affine et la composition préserve l'affinicité).

La catégorie des jeux négatifs linéaires $\mathbf{JNL}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{JN}$ dont les objets sont les jeux négatifs linéaires. Sa sous-catégorie $\mathbf{JNLC}$ est celle dont les morphismes sont centraux, autrement dit, $\mathbf{JNLC}$ est la sous-catégorie de $\mathbf{JNC}$ dont les objets sont linéaires.

Les catégories $\mathbf{JNT}$, $\mathbf{JNCT}$, $\mathbf{JNLT}$ et $\mathbf{JNLCT}$ sont les sous-catégories respectives de $\mathbf{JN}$, $\mathbf{JNC}$, $\mathbf{JNL}$ et $\mathbf{JNLC}$ dont les objets sont bien terminés.

Proposition 4.31 (produit Cartésien). *Dans la catégorie $\mathbf{JN}$ des jeux négatifs, $\&$ est un produit Cartésien et $\top$ est l'objet terminal. Ceci est encore vrai pour les catégories $\mathbf{JNC}$, $\mathbf{JNL}$, et $\mathbf{JNLC}$ (et $\mathbf{JNT}$, $\mathbf{JNCT}$, $\mathbf{JNLT}$, $\mathbf{JNLCT}$). Dans la catégorie $\mathbf{JNA}$ des jeux négatifs affines, $\&$ est aussi un produit Cartésien et $\wr$ est l'objet terminal.*

Il s'agit du produit Cartésien standard de la sémantique des jeux (affine ou linéaire) qui ne demande aucune adaptation particulière pour le passage aux jeux à bord. Le couplage (*pairing*) de $f : C{\multimap}A$ et $g : C{\multimap}B$, noté $[f, g]$, est alors $f \cup g$ où l'on a pris soin de délocaliser A et B en des jeux disjoints. Les projections sont les identités sur A et sur B prises respectivement de $A \,\&\, B$ dans A et de $A \,\&\, B$ dans B. Le produit $f \,\&\, g$ de $f : A_1{\multimap}B_1$ et $g : A_2{\multimap}B_2$ est l'union disjointe de f et g. Les morphismes terminaux de $\mathbf{JN}$, $\mathbf{JNL}$, $\mathbf{JNC}$ et $\mathbf{JNLC}$ sont les stratégies vides. Les morphismes terminaux de la catégorie $\mathbf{JNA}$ sont les stratégies ne contenant que la partie vide.

Pour $\sigma : A{\multimap}B$ et $\tau : B{\multimap}C$, on a

$$\sigma \fatsemi \tau = \{s{\restriction}(A{\multimap}C) \mid s \in D^*, s{\restriction}(A{\multimap}B) \in \sigma \text{ et } s{\restriction}(B{\multimap}C) \in \tau\}$$

où D est n'importe quel alphabet contenant tous les coups des jeux A, B et C (proposition 4.20).

Cette composition dans les jeux à bord est à rapprocher de ce que l'on fait habituellement dans les sémantiques des jeux. Pour autant la composition standard dans la sémantique des jeux consisterait à composer des stratégies closes par préfixes ce qui ici reviendrait à écrire :

$$\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau = \{s{\upharpoonright}(A \multimap C) \mid s \in D^* s{\upharpoonright}(A \multimap B) \in \nabla\,\sigma \text{ et } s{\upharpoonright}(B \multimap C) \in \nabla\,\tau\}$$

où encore en ne prenant que des préfixes de longueur paire (ce qui reviendrait à considérer temporairement que le bord est clos par préfixes paires). Cette égalité ne définit pas la même composition que celle que nous utilisons ici : on a bien $\nabla(\sigma \fatsemi \tau) \subset \nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau$ mais on a pas en toute généralités l'inclusion inverse pas plus que l'inclusion :

$$(\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau) \cap S_{A \multimap C} \subset \sigma \fatsemi \tau.$$

De plus, en composant sur les préfixes puis en restreignant au bord on ne définirait pas une composition pour les stratégies à bord car celle-ci ne serait pas associative.

Nous donnons deux exemples pour illustrer les deux aspects de cette remarque.

On se donne quatre jeux négatifs à bord $\int$, B, C et D avec

$$\begin{aligned} S_B &= \{b_1^{\mathrm{O}} b_2^{\mathrm{J}} b_3^{\mathrm{O}} b_4^{\mathrm{J}}, b_1^{\mathrm{O}} b_2^{\mathrm{J}} b_5^{\mathrm{O}} b_6^{\mathrm{J}}\} \\ S_C &= \{c_1^{\mathrm{O}} c_2^{\mathrm{J}}, c_1^{\mathrm{O}} c_2^{\mathrm{J}} c_3^{\mathrm{O}} c_4^{\mathrm{J}}\} \\ S_D &= \{d^{\mathrm{O}} d^{\mathrm{J}}\} \end{aligned}$$

Considérons les stratégies $\sigma = \{b_1^{\mathrm{O}} b_2^{\mathrm{J}} b_3^{\mathrm{O}} b_4^{\mathrm{J}}\}$ de type $\int \multimap B$ et $\tau = \{c_1^{\mathrm{O}} b_1^{\mathrm{O}} b_2^{\mathrm{J}} c_2^{\mathrm{J}} c_3^{\mathrm{O}} b_5^{\mathrm{O}} b_6^{\mathrm{J}} c_4^{\mathrm{J}}\}$ de type $B \multimap C$. On a alors $\sigma \fatsemi \tau = \emptyset$ et

$$(\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau) \cap S_{\int \multimap C} = \{c_1^{\mathrm{O}} c_2^{\mathrm{J}}\}.$$

Ce qui montre bien qu'on a $(\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau) \cap S_{\int \multimap C} \not\subset \sigma \fatsemi \tau$. Considérons une troisième stratégie $\nu = \{d^{\mathrm{O}} c_1^{\mathrm{O}} c_2^{\mathrm{J}} d^{\mathrm{J}}\}$ de type $C \multimap D$. On a alors

$$\begin{aligned} (\nabla((\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\tau) \cap S_{\int \multimap C}) \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\nu) \cap S_{\int \multimap D} &= \{d^{\mathrm{O}} d^{\mathrm{J}}\} \\ (\nabla\,\tau \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\nu) \cap S_{B \multimap D} &= \emptyset \\ (\nabla\,\sigma \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla((\nabla\,\tau \fatsemi_{\text{jeux}} \nabla\,\nu) \cap S_{B \multimap D})) \cap S_{\int \multimap D} &= \emptyset \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que composer par préfixes puis restreindre au bord n'est pas une opération associative.

Lemme 4.32. *Si B et C sont des jeux négatifs bien terminés alors*

$$\sigma \fatsemi \tau = \{p{\upharpoonright}(A \multimap C) \mid p{\upharpoonright}(A \multimap B) \in \nabla\,\sigma \textit{ et } p{\upharpoonright}(B \multimap C) \in \nabla\,\tau\} \cap S_{A \multimap C}$$

pour tous morphismes $\sigma : A \multimap B$ et $\tau : B \multimap C$. Et de même avec la clôture par préfixes paires.

Démonstration. L'inclusion

$$\sigma \fatsemi \tau \subseteq \{p{\upharpoonright}(A \multimap C) \mid p{\upharpoonright}(A \multimap B) \in \nabla\,\sigma \text{ et } p{\upharpoonright}(B \multimap C) \in \nabla\,\tau\} \cap S_{A \multimap C}$$

est directe.

Soit un mot p tel que $p{\upharpoonright}(A \multimap B) \in \nabla\,\sigma$, $p{\upharpoonright}(B \multimap C) \in \nabla\,\tau$ et $p{\upharpoonright}(A \multimap C) \in S_{A \multimap C}$. On a alors $p{\upharpoonright}A \in S_A$ et $p{\upharpoonright}C \in S_C$. Et il existe $s \in \tau$ tel que $p{\upharpoonright}(B \multimap C) \preceq s$. Ainsi $p{\upharpoonright}C \preceq s{\upharpoonright}C$ et par bonne terminaison de C ces mots sont égaux. Par la condition de basculement sur la flèche linéaire négative, s se termine par le dernier coup de $s{\upharpoonright}C$. C'est donc que $p{\upharpoonright}(B \multimap C)$ et s sont égaux. Il s'en suit que $p{\upharpoonright}B$ est un élément de S_B. En utilisant maintenant la bonne terminaison de B on obtient que $p{\upharpoonright}(A \multimap B)$ est un élément de τ. Finalement p est un témoin de la composition de σ avec τ ce qui conclut. $\square$

Lemme 4.33. *Soient $f : A \multimap B$ et $g : A \multimap B$ deux morphismes. Si $s \in f \fatsemi g$ alors il existe un unique $s_1 \in f$ et un unique $s_2 \in g$ tels que $s = [\![s_1 \fatsemi s_2]\!]_B$.*

Démonstration. Soient $s_1, s_1' \in f$ et $s_2, s_2' \in f$ tels que $[\![s_1 \fatsemi s_2]\!]_B = [\![s_1' \fatsemi s_2']\!]_B = s$. Pour prouver le lemme il suffit de montrer que $t = [\![s_1 \fatsemi s_2]\!]$ et $t' = [\![s_1' \fatsemi s_2']\!]$ sont égaux. Si s est le mot vide alors nécessairement $t = t' = \varepsilon$. On peut donc supposer que s n'est pas le mot vide. Les deux mots t et t' terminent sur un même coup dans C^{J} et leurs projections sur C sont égales, ils ne peuvent donc pas être préfixe strict l'un de l'autre. Supposons que $t \neq t'$. Soit alors t'' le plus grand préfixe commun de t et t' et soient d et d' les coups qui le prolonge dans t et dans t'. On raisonne en utilisant l'automate de la figure 4.4. Ce mot t'' est nécessairement non vide puisque t et t' doivent commencer par le premier coup de s (qui est dans C^{O}). Le dernier coup dans t'' ne peut pas être dans A^{O} puisque sinon d et d' seraient nécessairement dans A^{J} et ils seraient alors égaux par projections sur A. De même, le dernier coup dans t'' ne peut pas être dans C^{J}. S'il était dans $A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}$, d et d' seraient dans $A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$ mais dans ce cas on aurait $(t''\upharpoonright(A \multimap B)) \cdot d \preceq t\upharpoonright(A \multimap B) = s_1$ et $(t''\upharpoonright(A \multimap B)) \cdot d' \preceq t'\upharpoonright(A \multimap B) = s_1'$ donc $s_1 \wedge s_1'$ serait égal à $t''\upharpoonright(A \multimap B)$ qui est de polarité opposant et cela contredirait le fait que f est une stratégie. De même si ce dernier coup était dans $B^{\mathrm{J}} \cup C^{\mathrm{O}}$ on aurait une contradiction avec le fait que g est une stratégie. On arrive donc à une impossibilité qui conclut la preuve. □

Proposition 4.34 (isomorphismes). *Tout isomorphisme $\sigma : A \multimap B$ de la catégorie des jeux négatifs est central et la relation $\{(s\upharpoonright A, s\upharpoonright B) \mid s \in \sigma\}$ définit un isomorphisme d'arbres entre S_A et S_B. Réciproquement, si A et B sont des jeux négatifs, tout isomorphisme d'arbres entre S_A et S_B définit un isomorphisme central égal à $I_{f,A,B} = \{s \in S_{A \multimap B} \mid \forall s' \preccurlyeq^{\mathrm{J}} s, f(s'\upharpoonright A) = s'\upharpoonright B\}$. Par extension, dans* **JN** *on parle d'isomorphisme fort entre un jeu A et un jeu B, (notation $A \cong_f B$) lorsque A et B sont isomorphes et que l'isomorphisme d'arbres associé est (fort et) défini par un bijection entre les ensembles de coups des jeux A et B.*

Démonstration. On ne prouve que la première partie de la proposition, c'est-à-dire qu'un isomorphisme dans la catégorie des jeux négatifs est central et qu'il définit un isomorphisme d'arbre. La réciproque est facile. Soit $\sigma : A \multimap B$, un isomorphisme et soit $\tau : B \multimap A$ sa réciproque. Soient $s \in \sigma$ et $t \in \tau$. Si $s\upharpoonright B = t\upharpoonright B$ alors $[\![s \fatsemi t]\!]_B \in I_A$ donc $s\upharpoonright A = t\upharpoonright A$ et par suite $[\![t \fatsemi s]\!]_B \in I_B$. Et réciproquement. Conformément à la remarque 4.26, on utilise ici la convention que $\sigma \fatsemi \tau$ est une stratégie de $A_l \multimap A_r$ et de même pour $\tau \fatsemi \sigma$. Comme $[\![s \fatsemi t]\!]\upharpoonright(A_l \multimap A_r) \in I_A$, $[\![s \fatsemi t]\!]\upharpoonright(A_l \multimap A_r)$ est un élément de $(A_r^{\mathrm{O}} \cdot (A_l^{\mathrm{O}} \cdot A_l^{\mathrm{J}})^* \cdot A_r^{\mathrm{J}})^*$. Par ailleurs $[\![s \fatsemi t]\!]$ est reconnu par l'automate de la figure 4.4 (pour $A = A_l$ et $C = A_r$). On en déduit que $[\![s \fatsemi t]\!]$ est un élément de

$$(A_r^{\mathrm{O}} \cdot (B^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{J}})^* \cdot B^{\mathrm{O}} \cdot A_l^{\mathrm{O}} \cdot A_l^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{J}} \cdot (B^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{J}})^* \cdot A_r^{\mathrm{J}})^*.$$

De même, comme $[\![t \fatsemi s]\!]\upharpoonright(B_l \multimap B_r) \in I_B$, $[\![t \fatsemi s]\!]$ est un élément de

$$(B_r^{\mathrm{O}} \cdot (A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}} \cdot B_l^{\mathrm{O}} \cdot B_l^{\mathrm{J}} \cdot A^{\mathrm{J}} \cdot (A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot B_r^{\mathrm{J}})^*.$$

Donc s est à la fois un élément de $((B^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{J}})^* \cdot B^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{J}} \cdot (B^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{J}})^*)^*$ et un élément de $(B^{\mathrm{O}} \cdot (A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}} \cdot (A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot B^{\mathrm{J}})^*$ d'où finalement $s \in (B^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{J}})^*$ et de même $t \in (A^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{O}} \cdot B^{\mathrm{J}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*$. Ainsi σ est central.

Comme $\sigma \fatsemi \tau = I_A$ c'est que pour chaque $p \in S_A$ il existe $s \in \sigma$ tel que $s\upharpoonright A = p$ et il existe $t \in \tau$ tel que $t\upharpoonright A = p$.

Soient $p \in S_A$, $t \in \tau$ et $s_1, s_2 \in \sigma$ tels que $t\upharpoonright A = s_1\upharpoonright A = s_2\upharpoonright A = p$. De tels éléments t, s_1 et s_2 existent car $\sigma \fatsemi \tau = I_A$ et, comme $[\![s_1 \fatsemi t]\!]_A \in I_B$ et $[\![s_2 \fatsemi t]\!]_A \in I_B$, c'est que $s_1\upharpoonright B = s_2\upharpoonright B$ (et donc que $s_1 = s_2$).

La relation $f = \{(s\upharpoonright A, s\upharpoonright B) \mid s \in \sigma\}$ est fonctionnelle. En effet, soient $s_1, s_2 \in \sigma$ tels que $s_1\upharpoonright A = s_2\upharpoonright A$. Alors, comme $\sigma \fatsemi \tau = I_A$ il existe un élément t de τ tel que $\tau\upharpoonright A = s_1\upharpoonright A = s_2\upharpoonright A$. Comme $\tau \fatsemi \sigma = I_B$, on a alors $[\![s_1 \fatsemi t]\!]_A \in I_B$ et $[\![s_2 \fatsemi t]\!]_A \in I_B$ donc $s_1\upharpoonright B = s_2\upharpoonright B = t\upharpoonright B$.

De plus, la fonction de S_A dans S_B définie par cette relation est totale et elle est surjective. En effet, pour chaque élément p de S_A, comme $\sigma \fatsemi \tau = I_A$ il existe un élément de σ dont la projection sur A est p. De même, pour chaque élément q de S_B, comme $\tau \fatsemi \sigma = I_B$ il existe un élément de σ dont la projection sur B est q. On note encore f cette fonction.

Enfin, comme les éléments de σ, sont des éléments de $(B^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{J}})^*$, la fonction f préserve la longueur des mots.

Le même raisonnement s'applique à la fonction g définie par la relation $\{(t\upharpoonright B, t\upharpoonright A) \mid t \in \tau\}$. En utilisant le fait que $\sigma \fatsemi \tau = I_A$ on obtient que $g \circ f$ est la fonction identité sur S_A. De même, $f \circ g$ est la fonction identité sur S_B.

Ainsi f est une bijection de S_A dans S_B qui préserve la longueur des mots et g est sa réciproque. Il reste à prouver que

$$\forall p_1, p_2 \in S_A, ||f(p_1) \wedge f(p_2)|| = ||p_1 \wedge p_2||.$$

Comme f préserve la longueur des mots il suffit de faire la preuve pour $p_1 \neq p_2$.

Soient $p_1, p_2 \in S_A$ tels que $p_1 \neq p_2$ et soient $q_1, q_2 \in S_B$ tels que $f(p_1) = q_1$ et $f(p_2) = q_2$. Il existe alors $s_1, s_2 \in \sigma$ et $t_1, t_2 \in \tau$ tels que $s_1\upharpoonright A = t_1\upharpoonright A = p_1$, $s_1\upharpoonright B = t_1\upharpoonright B = q_1$, $s_2\upharpoonright A = t_2\upharpoonright A = p_2$ et $s_2\upharpoonright B = t_2\upharpoonright B = q_2$.

Supposons que $||p_1 \wedge p_2|| < ||q_1 \wedge q_2||$. Par déterminisme de σ, $s_1 \wedge s_2$ est de longueur paire c'est donc que $s_1 = w \cdot b^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{O}} a_1^{\mathrm{J}} b_1^{\mathrm{J}} \ldots$ et $s_2 = w \cdot b^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{O}} a_2^{\mathrm{J}} b_2^{\mathrm{J}} \ldots$ avec $a_1^{\mathrm{J}} \neq a_2^{\mathrm{J}}$. Alors $t_1 = w' \cdot a^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{O}} b_1^{\mathrm{J}} a_1^{\mathrm{J}} \ldots$ et $t_2 = w' \cdot a^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{O}} b_2^{\mathrm{J}} a_2^{\mathrm{J}} \ldots$ mais par déterminisme de τ, $t_1 \wedge t_2$ est aussi de longueur paire donc $b_1^{\mathrm{J}} \neq b_2^{\mathrm{J}}$. De quoi l'on déduit que $p_1 \wedge p_2$ et $q_1 \wedge q_2$ ont la même longueur, ce qui est une contradiction. Le cas $||p_1 \wedge p_2|| > ||q_1 \wedge q_2||$ se traite de la même manière pour aboutir à la même contradiction et c'est donc que $||p_1 \wedge p_2|| = ||f(p_1) \wedge f(p_2)||$. $\square$

Remarque 4.35. L'égalité entre jeux négatifs est un isomorphisme fort.

Proposition 4.36 (isomorphismes usuels). *Soient A, B, C des jeux négatifs. On a les isomorphismes forts suivants :*

- $A \,\&\, \top = \top \,\&\, A \cong_f A$ *($\top$ élément neutre du $\&$)*
- $A \,\&\, B = B \,\&\, A$ *(commutativité du $\&$)*
- $A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, B \,\&\, C$ *(associativité du $\&$)*
- $A \parr B \cong_f B \parr A$ *(commutativité du $\parr$)*
- $A \parr (B \parr C) \cong_f (A \parr B) \parr C \cong_f (A \parr B \parr C)$ *(associativité du $\parr$)*
- $A \parr \top \cong_f \top$ *($\top$ est absorbant pour le $\parr$)*
- $A \odot \int = \int \odot A = A$ *($\int$ élément neutre du tenseur négatif)*
- $A \odot B \cong_f B \odot A$ *(commutativité du tenseur négatif)*
- $A \odot (B \odot C) \cong_f (A \odot B) \odot C \cong_f (A \odot B \odot C)$ *(associativité du tenseur négatif)*
- $A \rightarrowtriangle (B \rightarrowtriangle C) \cong_f (A \odot B) \rightarrowtriangle C$

Proposition 4.37 (nouveaux isomorphismes). *Soient A, B, C des jeux négatifs. On a les isomorphismes forts suivants :*

- $\downarrow \top = 0$
- $\downarrow (A \odot B) \cong_f \downarrow A \otimes \downarrow B$
- $A \rightarrowtriangle \bot = \uparrow (A^\perp)$
- $\downarrow \int = 1$ *et* $\int \rightarrowtriangle A = A$
- *et l'isomorphisme* $A \parr \int \cong_f \top$ *($\int$ est absorbant pour le $\parr$).*

Proposition 4.38. *Soient A un jeu négatif et B un jeu négatif linéaire. Alors on a les isomorphismes forts suivants :*

- $B \parr \bot \cong_f \bot \parr B \cong_f B$ *($\bot$ élément neutre du $\parr$ pour les jeux linéaires)*
- $A \rightarrowtriangle B \cong_f (\downarrow A)^\perp \parr B = (\downarrow A) \multimap B$

Remarques 4.39.

- L'isomorphisme $\downarrow \top \cong 0$ n'est pas définissable (on a trois preuves différentes de $\vdash 0^\perp, \downarrow \top$ mais $\vdash \uparrow \top^\perp, 0$ n'est pas prouvable).

- Dans la présentation originale des jeux polarisés ([Lau02b]) il y a exactement les mêmes isomorphismes, à la différence que, comme tous les jeux sont affines (ils contiennent tous la partie vide), il n'y pas de distinction entre $\top$ et $\wr$ et qu'ainsi $\downarrow \top \cong 1$ (ce qui n'est pas non plus un isomorphisme définissable).
- Tout isomorphisme entre jeux affines est affine et si A est un jeu négatif affine alors $A \mathbin{\&} \wr \cong A$.

Le parti pris est ici de présenter les modèles de jeux de la logique linéaire polarisée dans la catégorie $\mathbf{JN}$ des jeux négatifs. On pourrait aussi définir une flèche linéaire entre jeux positifs. Le jeu positifs A *flèche positive* B serait alors isomorphe au jeu

$$A \otimes \downarrow B^{\perp} \cong \downarrow B^{\perp} \otimes A \cong (\uparrow B \parr A^{\perp})^{\perp} \cong (B^{\perp} \mathrel{-\!\!\triangleright} A^{\perp})^{\perp}.$$

On aurait alors une catégorie de jeux positifs. On pourrait alors présenter le modèle soit entièrement dans la catégorie des jeux positifs, soit en utilisant les deux catégories.

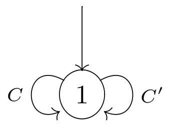


FIG. 4.5 – automate de $E \bullet E'$

Nous étendons l'opération $\odot$, définie sur les ensembles de mots, de manière à donner une description de l'action du *tenseur négatif* sur les morphismes. L'opération $\odot$ peut être décrite par une opération plus atomique, notée $\bullet$, d'entrelacement de mots de longueurs quelconques. Considérons deux ensembles de mots de longueurs paires E et E' sur deux alphabets disjoints A et A'. On peut alors considérer que E et E' sont des ensembles de mots de longueurs quelconques sur les alphabets $C = A \cdot A$ et $C' = A' \cdot A'$. Soient deux mots $a_1 \dots a_{2n} = c_1 \dots c_n \in E$ et $a'_1 \dots a'_{2k} = c'_1 \dots c'_k \in E'$ avec $c_i \in C$ et $c'_j \in C'$. On a alors que $a_1 \dots a_{2n} \odot a'_1 \dots a'_{2k}$ est l'ensemble $c_1 \dots c_n \bullet c'_1 \dots c'_k$ défini par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon \bullet c'_1 \dots c'_k &= \{c'_1 \dots c'_k\} \\
c_1 \dots c_n \bullet \varepsilon &= \{c_1 \dots c_n\} \\
c_1 \cdot m \bullet c'_1 \cdot m' &= c_1 \cdot (m \bullet c'_1 \cdot m') \cup c'_1 \cdot (c_1 \cdot m \bullet m').
\end{aligned}$$

Cette opération se généralise sur les ensembles de mots et cette généralisation est commutative et associative.

Supposons maintenant que l'on ait quatre alphabets disjoints A, A', B et B' et deux ensembles de mots E et E' qui vérifient $E \subseteq (B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$ et $E' \subseteq (B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B')^*$. On peut alors considérer que les mots de E et F sont respectivement des mots sur un alphabet $C = B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B$ et un alphabet $C' = B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B'$ et former l'ensemble $E \bullet E'$ relativement à C et C'. Cet ensemble est l'ensemble des mots de $((B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B) \cup (B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B')^*)^*$ dont la projection sur $A \cup B$ est dans E et dont la projection sur $A' \cup B'$ est dans E'. On note $E \odot_{B \cup B'} E'$ cet ensemble. Les éléments de $E \odot_{B \cup B'} E'$ sont les mots reconnus par l'automate de la figure 4.6 et dont les projections sur $A \cup B$ et sur $A' \cup B'$ sont respectivement des élément de E et de E'.

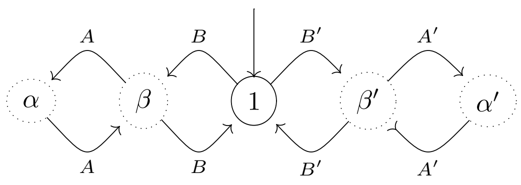


FIG. 4.6 – automate de $E \odot_{B \cup B'} E'$

L'opération $\odot_B$ est associative : pour $i = 1, 2, 3$, si E_i est un ensemble de mots sur deux alphabets disjoints A_i et B_i vérifiant

$$E_i \subseteq (B_i \cdot (A_i \cdot A_i)^* \cdot B_i)^*$$

et si de plus B_1, B_2 et B_3 sont deux à deux disjoints alors pour $B = B_1 \cup B_1 \cup B_3$ on a

$$(E_1 \odot_B E_2) \odot_B E_3 = E_1 \odot_B (E_2 \odot_B E_3).$$

Ceci est une conséquence directe de l'associativité de l'opération d'entrelacement $\bullet$. Cette opération $\odot_B$ est aussi commutative.

Lemme 4.40.

Si A, A', B et B' sont des alphabets deux à deux disjoints et si $s \in (B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$, $s' \in (B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B')^*$ et $t \in (B \cdot B)^* \odot (B' \cdot B')^*$ sont des mots tels que $s{\upharpoonright}B = t{\upharpoonright}B$ et $s'{\upharpoonright}(A') = t{\upharpoonright}(B')$ alors il existe un unique mot m sur $A \cup A' \cup B \cup B'$ dont la projection sur $A \cup B$ est égale à s, dont la projection sur $A' \cup B'$ est égale à s' et dont la projection sur $B \cup B'$ est égale à t et ce mot m est un élément de $s \odot_{B \cup B'} s'$.

Démonstration. Par le lemme 4.19, il existe un mot m_1 sur $A \cup B \cup B'$ dont la projection sur $A \cup B$ est s et dont la projection sur $B \cup B'$ est t. En appliquant à nouveau le lemme 4.19, on a un mot m sur $A \cup A' \cup B \cup B'$ dont la projection sur $A \cup B$ est s, dont la projection sur $A' \cup B'$ est s' et dont la projection sur $B \cup B'$ est t. On montre alors que ce mot est un élément de $s \odot_{B \cup B'} s'$ et qu'il est unique. Pour cela, il suffit de montrer que m est accepté par l'automate de la figure 4.6. En effet, on aurait alors $m \in s \odot_{B \cup B'} s'$. Et, si m' était un mot sur $A \cup A' \cup B \cup B'$ ayant les même projections que m sur $A \cup B$, $A' \cup B'$ et $B \cup B'$, alors m' serait accepté par cet automate et aurait la même longueur que m. Pour tout mot m'' et toute paire de lettres c, c' de $A \cup A' \cup B \cup B'$ tels que $m'' \cdot c \preceq m$ et $m'' \cdot c' \preceq m'$, en raisonnant par cas sur l'état Q atteint par l'automate de la figure 4.6 on obtiendrait alors l'égalité de c et de c' :

– si $Q = 1$ alors $c, c' \in B \cup B'$ et, comme $m'' \cdot c{\upharpoonright}(B \cup B') = m'' \cdot c'{\upharpoonright}(B \cup B')$, $c = c'$;
– si $Q = \alpha$ ou si $Q = \beta$ alors $c, c' \in A \cup B$ et, comme $m'' \cdot c{\upharpoonright}(A \cup B) = m'' \cdot c'{\upharpoonright}(A \cup B)$, $c = c'$;
– si $Q = \alpha'$ ou si $Q = \beta'$ alors $c, c' \in A' \cup B'$ et, comme $m'' \cdot c{\upharpoonright}(A' \cup B') = m'' \cdot c'{\upharpoonright}(A' \cup B')$, $c = c'$.

Et ainsi on conclurait à l'égalité de m et de m', c'est à dire à l'unicité de m.

Il reste à montrer que m est reconnu par l'automate de la figure 4.6. Soit $m' \cdot c$ un préfixe de m tel que m' est un mot (éventuellement vide) admis par cet automate. En raisonnant par cas sur l'état Q atteint par l'automate sur l'entrée m', on montre que $m \cdot c$ est lui aussi admis par l'automate.

- Si $Q = 1$ alors $m'{\upharpoonright}B$ et $m'{\upharpoonright}(B')$ sont des mots de longueurs paires. Or, si c était un élément de A, comme $m' \cdot c{\upharpoonright}(A \cup B) \preceq m{\upharpoonright}(A \cup B)$ et $m{\upharpoonright}(A \cup B) \in (B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$, le mot $m'{\upharpoonright}B$ serait de longueur impaire. Ainsi $c \notin A$. De même $c \notin A'$. Donc $c \in B \cup B'$ et le mot $m \cdot c$ est admis par l'automate.
- Si $Q = \alpha$ ou si $Q = \beta$ alors $m'{\upharpoonright}(B \cup B')$ est de longueur impaire et a sa dernière lettre dans B et le mot $m'{\upharpoonright}(A' \cup B')$ est de longueur paire. Donc, si c était un élément de A' cela contredirait le fait que $m{\upharpoonright}(A' \cup B')$ est un élément de $(B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B')^*$ et si c était un élément de B' cela contredirait le fait que $m{\upharpoonright}(B \cup B')$ est un élément de $((B \cup B) \cup (B' \cdot B'))^*$. Donc si $Q = \alpha$ ou si $Q = \beta$ alors c est un élément de $A \cup B$. Si $Q = \alpha$ alors $m'{\upharpoonright}A$ est de longueur impaire et, comme $(m{\upharpoonright}(A \cup B)) \cdot c$ est préfixe d'un élément de $(B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$, c'est que $c \in A$. Si $Q = \beta$ alors $m'{\upharpoonright}B$ est de longueur impaire et sa dernière lettre est dans B, comme $(m'{\upharpoonright}(A \cup B)) \cdot c$ est préfixe d'un élément de $(B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$, c'est que $c \in B$. Dans le deux cas $m' \cdot c$ est admis par l'automate.
- De même, si $Q = \alpha'$ ou si $Q = \beta'$ alors $m' \cdot c$ est encore admis par l'automate.

Finalement m est admis par l'automate de la figure 4.6. Il reste à montrer que cet automate est dans l'état de sortie 1 sur l'entrée m. Si m est le mot vide c'est le cas. Soit c la dernière lettre de m. Comme $m{\upharpoonright}(A \cup B) \in (B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$, c n'est pas un élément de A et, comme $m{\upharpoonright}(A' \cup B') \in (B' \cdot (A' \cdot A')^* \cdot B')^*$, c n'est pas non plus un élément de A'. Donc, sur l'entrée m, l'automate passe soit dans l'état β, soit dans l'état β', soit dans l'état 1. Si c'était l'état β alors $m{\upharpoonright}B$ serait de longueur impaire ce qui contredit, par exemple, le fait que $m{\upharpoonright}(A \cup B) \in (B \cdot (A \cdot A)^* \cdot B)^*$. De même, si c'était l'état β'. Donc finalement l'automate est dans l'état de sortie 1 sur l'entrée m, ce qui conclut. $\square$

Proposition 4.41 (clôture monoïdale). *Soient A, A', B et B' des jeux négatifs deux à deux disjoints. Si $\sigma : A \multimap B$ et $\sigma' : A \multimap B'$ sont deux morphismes de la catégorie* $\mathbf{JN}$ *des jeux négatifs alors*

$$\begin{aligned}\sigma \odot \sigma' &= \{t \in S_{(A\odot A')\multimap(B\odot B')} \mid t\restriction(A\multimap B) \in \sigma \text{ et } t\restriction(A'\multimap B') \in \sigma'\} \\ &= \bigcup_{s\in\sigma s\in\sigma'} s \odot_{B\cup B'} s'\end{aligned}$$

est un morphisme de $A \odot A$ dans $B \odot B'$. L'opération $\odot$ ainsi définie est un foncteur dans la catégorie $\mathbf{JN}$ *des jeux négatifs et dans sa sous-catégorie* $\mathbf{JNA}$ *(des jeux négatifs affines et des morphismes affines) et ces deux catégories sont monoïdales symétriques closes pour la structure $(\odot, \multimap, \S)$.*

Démonstration. Il s'agit de l'adaptation directe aux jeux à bord d'un résultat standard de sémantique des jeux. L'égalité

$$\{t \in S_{(A\odot A')\multimap(B\odot B')} \mid t\restriction(A\multimap B) \in \sigma \text{ et } t\restriction(A'\multimap B') \in \sigma'\} = \bigcup_{s\in\sigma \text{ et } s\in\sigma'} s \odot_{B\cup B'} s'$$

est une conséquence du lemme 4.40.

Pour montrer que $\sigma \odot \sigma'$ est un morphisme de $(A \odot A')\multimap(B \odot B')$, il reste uniquement à montrer que $\sigma \odot \sigma'$ est déterministe. Soient t_1 et t_2 deux éléments de $\sigma \odot \sigma'$ et supposons qu'ils admettent un préfixe commun p de longueur impaire qui se prolonge en un coup c_1 dans t_1 et un un coup c_2 dans t_2. Alors t_1 et t_2 sont reconnus par l'automate de la figure 4.6 et sur l'entrée p, cet automate est dans l'état β ou l'état β'. Si c'est l'état β alors c_1 et c_2 sont des éléments de $A \cup B$, $p\restriction(A\multimap B) \cdot c_1$ est un préfixe de $t_1\restriction(A\multimap B)$ de longueur paire et $p\restriction(A\multimap B) \cdot c_2$ est un préfixe de $t_2\restriction(A\multimap B)$ de longueur paire. Comme $t_1\restriction(A\multimap B)$ et $t_2\restriction(A\multimap B)$ sont des éléments de σ, on en déduit que $c_1 = c_2$, par déterminisme de σ. De même, si l'automate de la figure 4.6 est dans l'état β' sur l'entrée p alors par déterminisme de σ', $c_1 = c_2$. Ceci prouve que $\sigma \odot \sigma'$ est déterministe.

La clôture monoïdale s'obtient de la manière standard en sémantique des jeux en utilisant les quatre derniers isomorphismes de la proposition 4.36. □

Proposition 4.42. *Soient A, B, A', B' des jeux négatifs linéaires et soient $\sigma : A \dot{\multimap} B$ et $\sigma' : A' \dot{\multimap} B'$. Alors $\sigma \parr \sigma' = \{t \in S_{(A\parr A')\multimap(B\parr B')} \mid t\restriction(A\multimap B) \in \sigma \text{ et } t\restriction(A'\multimap B') \in \sigma'\}$ est une stratégie centrale de $A \parr A'$ dans $B \parr B'$.*

Lemme 4.43 (*par* concret des morphismes). *Sous les hypothèses précédentes on a*

$$\sigma \parr \sigma' = \bigcup_{\substack{b^{\mathrm{O}}a^{\mathrm{O}}\cdot m\cdot a^{\mathrm{J}}b^{\mathrm{J}}\in\sigma \\ b'^{\mathrm{O}}a'^{\mathrm{O}}\cdot m'\cdot a'^{\mathrm{J}}b'^{\mathrm{J}}\in\sigma'}} (b^{\mathrm{O}}, b'^{\mathrm{O}})(a^{\mathrm{O}}, a'^{\mathrm{O}}) \cdot m \odot_{A\cup A'} m' \cdot (a^{\mathrm{J}}, a'^{\mathrm{J}})(b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}})$$

Et donc $\sigma \parr \sigma' \subseteq \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est le langage de l'automate de la figure 4.7.

En particulier, si $s \in \sigma$, $s' \in \sigma'$ et $u \in S_{A\parr A'}$ sont tels que $s\restriction A = u\restriction A$ et $s'\restriction(A') = u\restriction(A')$ alors il existe un unique $t \in S_{(A\parr A')\multimap(B\parr B')}$ tel que $t\restriction(A\multimap B) = s$, $t\restriction(A'\multimap B') = s'$ et $t\restriction(A \parr A') = u$.

Démonstration de la proposition et du lemme. On vérifie facilement que les éléments de

$$\bigcup_{\substack{b^{\mathrm{O}}a^{\mathrm{O}}\cdot m\cdot a^{\mathrm{J}}b^{\mathrm{J}}\in\sigma \\ b'^{\mathrm{O}}a'^{\mathrm{O}}\cdot m'\cdot a'^{\mathrm{J}}b'^{\mathrm{J}}\in\sigma'}} (b^{\mathrm{O}}, b'^{\mathrm{O}})(a^{\mathrm{O}}, a'^{\mathrm{O}}) \cdot m \odot_{A\cup A'} m' \cdot (a^{\mathrm{J}}, a'^{\mathrm{J}})(b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}})$$

Sont des éléments de $\sigma \parr \sigma'$ reconnus par l'automate de la figure 4.7.

Soit $t \in \sigma \parr \sigma'$ et soient $s = t\restriction(A\multimap B)$ et $s' = t\restriction(A'\multimap B')$. Comme $t \in S_{(A\parr A')\multimap(B\parr B')}$, $t = (b^{\mathrm{O}}, b'^{\mathrm{O}}) \cdot w \cdot (b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}})$ avec $b^{\mathrm{O}} \in B^{\mathrm{O}}$, $b'^{\mathrm{O}} \in B'^{\mathrm{O}}$, $b^{\mathrm{J}} \in B^{\mathrm{J}}$ et $b'^{\mathrm{J}} \in B'^{\mathrm{J}}$, donc $s = b^{\mathrm{O}} \dots b^{\mathrm{J}}$ et

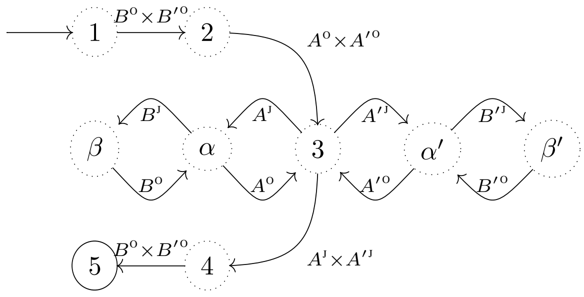


FIG. 4.7 – automate du *par* des morphismes

$s' = b'^{\mathrm{O}} \dots b'^{\mathrm{J}}$. Comme s et s' sont centrales $s = b^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{O}} \cdot m \cdot a^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{J}}$ et $s' = b'^{\mathrm{O}} a'^{\mathrm{O}} \cdot m' \cdot a'^{\mathrm{J}} b'^{\mathrm{J}}$ avec $a^{\mathrm{O}} \in A^{\mathrm{O}}$, $a'^{\mathrm{O}} \in A'^{\mathrm{O}}$, $a^{\mathrm{J}} \in A^{\mathrm{J}}$, $a'^{\mathrm{J}} \in A'^{\mathrm{J}}$ et $m, m' \in A^{\mathrm{J}} \cdot ((A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}}) \cup (B^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{O}}))^* \cdot A^{\mathrm{O}}$. Donc $w \restriction (A \multimap B) = a^{\mathrm{O}} \cdot m \cdot a^{\mathrm{J}}$ et $w \restriction (A' \multimap B') = a'^{\mathrm{O}} \cdot m' \cdot a'^{\mathrm{J}}$, donc les premiers et derniers coups de w ne sont pas dans $B \parr B'$ et il s'ensuit que $t = (b^{\mathrm{O}}, b'^{\mathrm{O}})(a^{\mathrm{O}}, a'^{\mathrm{O}}) \cdot w' \cdot (a^{\mathrm{J}}, a'^{\mathrm{J}})(b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}})$ pour un certain w' donc t est centrale. De plus w' est tel que $w' \restriction (A \multimap B) = m$, $w' \restriction (A' \multimap B') = m'$ et $w' \restriction (A, A') \in (A^{\mathrm{J}} \cdot A^{\mathrm{O}})^* \odot (A'^{\mathrm{J}} \cup A'^{\mathrm{O}})^*$ (car $w \restriction (A, A') \in S_{A \parr A'}$). Comme m et m' sont des éléments de $A^{\mathrm{J}} \cdot ((A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}}) \cup (B^{\mathrm{J}} \cdot B^{\mathrm{O}}))^* \cdot A^{\mathrm{O}}$, on en déduit, par le lemme 4.40, que $w' \in m \odot_{A \cup A'} m'$.

Ceci achève de prouver l'égalité

$$\sigma \parr \sigma' = \bigcup_{\substack{b^{\mathrm{O}} a^{\mathrm{O}} \cdot m \cdot a^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{J}} \in \sigma \\ b'^{\mathrm{O}} a'^{\mathrm{O}} \cdot m' \cdot a'^{\mathrm{J}} b'^{\mathrm{J}} \in \sigma'}} (b^{\mathrm{O}}, b'^{\mathrm{O}})(a^{\mathrm{O}}, a'^{\mathrm{O}}) \cdot m \odot_{A \cup A'} m' \cdot (a^{\mathrm{J}}, a'^{\mathrm{J}})(b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}}).$$

Il reste à montrer que $\sigma \parr \sigma'$ est déterministe. Soient t_1 et t_2 deux éléments de $\sigma \parr \sigma'$. Alors il existe $s_1, s_1' \in \sigma$, $s_2, s_2' \in \sigma'$ avec

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1^{\mathrm{O}} a_1^{\mathrm{O}} \cdot m_1 \cdot a_1^{\mathrm{J}} b_1^{\mathrm{J}} \\ s_1' &= b'^{\mathrm{O}}_1 a'^{\mathrm{O}}_1 \cdot m_1' \cdot a'^{\mathrm{J}}_1 b'^{\mathrm{J}}_1 \\ s_2 &= b_2^{\mathrm{O}} a_2^{\mathrm{O}} \cdot m_2 \cdot a_2^{\mathrm{J}} b_2^{\mathrm{J}} \\ s_2' &= b'^{\mathrm{O}}_2 a'^{\mathrm{O}}_2 \cdot m_2' \cdot a'^{\mathrm{J}}_2 b'^{\mathrm{J}}_2 \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} t_1 &= (b_1^{\mathrm{O}}, {b_1'}^{\mathrm{O}})(a_1^{\mathrm{O}}, {a_1'}^{\mathrm{O}}) \cdot w_1 \cdot (a_1^{\mathrm{J}}, {a_1'}^{\mathrm{J}})(b_1^{\mathrm{J}}, {b_1'}^{\mathrm{J}}) \\ t_2 &= (b_2^{\mathrm{O}}, {b_2'}^{\mathrm{O}})(a_2^{\mathrm{O}}, {a_2'}^{\mathrm{O}}) \cdot w_2 \cdot (a_2^{\mathrm{J}}, {a_2'}^{\mathrm{J}})(b_2^{\mathrm{J}}, {b_2'}^{\mathrm{J}}) \end{aligned}$$

avec $w_1 \in m_1 \odot_{A \cup A'} m_1'$ et $w_2 \in m_2 \odot_{A \cup A'} m_2'$. Soit un préfixe commun q de t_1 et t_2. Supposons que q est de longueur impaire et soient c_1 le coup qui prolonge q dans t_1 et c_2 le coup qui prolonge q dans t_2. Si $q = (b_1^{\mathrm{O}}, {b_1'}^{\mathrm{O}}) = (b_2^{\mathrm{O}}, {b_2'}^{\mathrm{O}})$ ou si $q = (b_1^{\mathrm{O}}, {b_1'}^{\mathrm{O}})(a_1^{\mathrm{O}}, {a_1'}^{\mathrm{O}}) \cdot w_1 \cdot (a_1^{\mathrm{J}}, {a_1'}^{\mathrm{J}}) = (b_2^{\mathrm{O}}, {b_2'}^{\mathrm{O}})(a_2^{\mathrm{O}}, {a_2'}^{\mathrm{O}}) \cdot w_2 \cdot (a_2^{\mathrm{J}}, {a_2'}^{\mathrm{J}})$ alors par déterminisme de σ et σ' on en déduit que $c_1 = c_2$ dans les deux cas. Finalement, si $q = (b_1^{\mathrm{O}}, {b_1'}^{\mathrm{O}})(a_1^{\mathrm{O}}, {a_1'}^{\mathrm{O}}) \cdot q' = (b_2^{\mathrm{O}}, {b_2'}^{\mathrm{O}})(a_2^{\mathrm{O}}, {a_2'}^{\mathrm{O}}) \cdot q'$, on montre de même que $c_1 = c_2$ par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve de la proposition 4.41. Dans tous les cas q se prolonge en un préfixe de longueur paire commun à t_1 et t_2. On en déduit que le plus grand préfixe commun de t_1 et t_2 est de longueur paire, ce qui prouve bien que $\sigma \parr \sigma'$ est déterministe et achève ainsi la preuve.

□

Proposition 4.44. *L'opération $\parr$ est un bifoncteur de la catégorie* $\mathbf{JNC}$ *des jeux négatifs et des morphismes centraux. De plus, cette catégorie est monoïdale symétrique pour la structure* $(\parr, \bot)$ *et il en va de même pour les sous catégories* $\mathbf{JNLC}$ *et* $\mathbf{JNLCT}$.

Démonstration. Le fait que $I_A \parr I'_A = I_{A \parr A'}$ est une application directe du lemme 4.43.

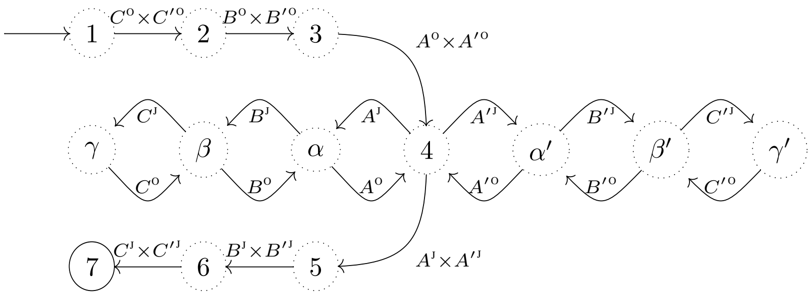
Soient maintenant $\sigma : A \dot{\rightarrowtriangle} B$, $\tau : B \dot{\rightarrowtriangle} C$, $\sigma' : A' \dot{\rightarrowtriangle} B'$ et $\tau' : B' \dot{\rightarrowtriangle} C'$ et montrons que $(\sigma \parr \sigma') \fatsemi (\tau \parr \tau') = (\sigma \fatsemi \tau) \parr (\sigma' \fatsemi \tau')$.

Soient $u \in \sigma \parr \sigma'$, $v \in \tau \parr \tau'$ tels que $u{\restriction}(B \parr B') = v{\restriction}(B \parr B')$ et soit $w = [\![u \fatsemi v]\!]$. On a $w{\restriction}((A \parr A') \rightarrowtriangle (B \parr B')) \in (\sigma \parr \sigma')$ donc $w{\restriction}(A \rightarrowtriangle B) \in \sigma$ et de même $w{\restriction}(B \rightarrowtriangle C) \in \tau$ et donc $w{\restriction}(A, B, C)$ est un témoin de $\sigma \fatsemi \tau$. De même, $w{\restriction}(A', B', C')$ est un témoin de $\sigma' \fatsemi \tau'$. Donc $w{\restriction}(A \rightarrowtriangle C) \in \sigma \fatsemi \tau$ et $w{\restriction}(A' \rightarrowtriangle C') \in \sigma' \fatsemi \tau'$, d'où, finalement

$$w{\restriction}((A \parr A') \rightarrowtriangle (C \parr C')) \in (\sigma \fatsemi \tau) \parr (\sigma' \fatsemi \tau'),$$

par définition du $\parr$ sur les morphismes centraux (proposition 4.42). Ce qui prouve $(\sigma \parr \sigma') \fatsemi (\tau \parr \tau') \subseteq (\sigma \fatsemi \tau) \parr (\sigma' \fatsemi \tau')$.

Soient maintenant $s \in \sigma \fatsemi \tau$, $s' \in \sigma' \fatsemi \tau'$ et $p \in S_{A \parr A'}$ tels que $s{\restriction}A = p{\restriction}A$ et $s'{\restriction}(A') = p{\restriction}(A')$. Montrons que l'unique $w \in (\sigma \fatsemi \tau) \parr (\sigma' \fatsemi \tau')$ associé à s, s' et p est aussi un élément de $(\sigma \parr \sigma') \fatsemi (\tau \parr \tau')$. Soient $u \in \sigma, u' \in \sigma', v \in \tau, v' \in \tau'$ tels que $s = [\![u \fatsemi v]\!]_B$ et $s' = [\![u' \fatsemi v']\!]_{B'}$ et notons $t = [\![u \fatsemi v]\!]$ et $t' = [\![u' \fatsemi v']\!]$. On a $t = c^{\mathsf{O}} b^{\mathsf{O}} a^{\mathsf{O}} \cdot o \cdot a^{\mathsf{J}} b^{\mathsf{J}} c^{\mathsf{J}}$, $t' = c'^{\mathsf{O}} b'^{\mathsf{O}} a'^{\mathsf{O}} \cdot o' \cdot a'^{\mathsf{J}} b'^{\mathsf{J}} c'^{\mathsf{J}}$ (par centralité) et $p = (a^{\mathsf{O}}, a'^{\mathsf{O}}) \cdot q \cdot (a^{\mathsf{J}}, a'^{\mathsf{J}})$ pour $a^{\mathsf{O}} \in A^{\mathsf{O}}$, $a'^{\mathsf{J}} \in A'^{\mathsf{O}}$, $b^{\mathsf{O}} \in B^{\mathsf{O}}$, $b'^{\mathsf{O}} \in B'^{\mathsf{O}}$, $c^{\mathsf{O}} \in C^{\mathsf{O}}$, $c'^{\mathsf{O}} \in C'^{\mathsf{O}}$, $a^{\mathsf{J}} \in A^{\mathsf{J}}$, $a'^{\mathsf{J}} \in A'^{\mathsf{J}}$, $b^{\mathsf{J}} \in B^{\mathsf{J}}$, $b'^{\mathsf{J}} \in B'^{\mathsf{J}}$, $c^{\mathsf{J}} \in C^{\mathsf{J}}$, $c'^{\mathsf{J}} \in C'^{\mathsf{J}}$ et des mots o, o' et q. Par le lemme 4.19, il existe un mot de $A \cup B \cup C$ qui se projette sur o, o' et p (le lemme 4.40 assure en fait que ce mot est unique). On en déduit qu'il existe un mot z (unique) tel que $z{\restriction}(A, B, C) = [\![u \fatsemi v]\!]$, $z{\restriction}(A', B', C') = [\![u' \fatsemi v']\!]$ et $z{\restriction}(A \parr A') = p$ et qui est accepté par l'automate :



D'après le lemme 4.43, $z{\restriction}((A \parr A') \rightarrowtriangle (C \parr C'))$ est alors égal à w (par unicité de w). Par ailleurs $z{\restriction}((A \parr A') \rightarrowtriangle (B \parr B'))$ est reconnu par l'automate de la figure 4.7 et comme $w{\restriction}(A \rightarrowtriangle B) \in \sigma$ et $w'{\restriction}(A' \rightarrowtriangle B') \in \sigma'$ c'est que $w{\restriction}((A \parr A') \rightarrowtriangle (B \parr B')) \in \sigma \parr \sigma'$. De même $w{\restriction}((B \parr B') \rightarrowtriangle (C \parr C'))$ est reconnu par l'automate correspondant et $w{\restriction}(B \rightarrowtriangle C) \in \tau$ et $w'{\restriction}(B' \rightarrowtriangle C') \in \tau'$, et c'est donc, toujours d'après le lemme 4.43, que

$$w{\restriction}((B \parr B') \rightarrowtriangle (C \parr C')) \in \tau \parr \tau'.$$

Finalement w est un témoin de la composition de $\sigma \parr \sigma$ et $\tau \parr \tau'$. Ceci prouve que

$$(\sigma \parr \sigma') \fatsemi (\tau \parr \tau') \subseteq (\sigma \fatsemi \tau) \parr (\sigma' \fatsemi \tau'),$$

ce qui achève la démonstration de la commutation du *par* avec la composition.

Finalement, la monoïdalité de la catégorie **JNLC** pour la structure $(\parr, \perp)$ est essentiellement une conséquence des isomorphismes de la proposition 4.36. □

On généralise la coupure aux stratégies.

Définition 4.45. Soient $A, B, C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_n$ des jeux négatifs deux à deux disjoints. Soient $\sigma : A \rightarrowtriangle (B \parr C_1 \parr \ldots \parr C_k)$ et $\tau : B \rightarrowtriangle (C_{k+1} \parr \ldots \parr C_n)$ alors $[\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B$ est l'ensemble $\{[\![s \fatsemi s']\!]_B \mid s \in \sigma, s' \in \tau \text{ et } s{\restriction}B = s'{\restriction}B\}$.

Remarque 4.46. Dans le cas particulier où $k = 0$, on a $[\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B = \sigma \fatsemi \tau$.

Proposition 4.47. *Soient $A, B, C_1, \ldots, C_n, D_1 \ldots, D_m$ des jeux négatifs deux à deux disjoints. Soient $\sigma : A \rightarrowtriangle (B \parr C_1 \parr \ldots \parr C_n)$ et $\tau : B \overset{\cdot}{\rightarrowtriangle} D_1 \parr \ldots \parr D_m$ alors, à associativité du* par *près, $\sigma \fatsemi (\tau \parr I_{D_1 \parr \ldots \parr D_k}) = [\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B$.*

Démonstration. On se contente de faire la preuve pour $n = 1$ et $m = 1$. Par définition,

$$\sigma \fatsemi (\tau \parr I_C) = [\![\sigma \fatsemi \tau \parr I_C]\!]_{B \parr C}.$$

Il faut donc montrer que $[\![\sigma \fatsemi \tau \parr I_C]\!]_{B \parr C} = [\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B$.

Conformément à la convention de la remarque 4.26, la copie gauche de C dans I_C est délocalisée en l et la copie droite est délocalisée en r. Toujours selon cette convention on oublie ces délocalisations dans les coupures atomiques.

Supposons que l'on ait montré que si $s \in \sigma$ et $t \in \tau \parr I_C$ sont tels que $s\upharpoonright(B \parr C) = t\upharpoonright(B \parr C_l)$, alors $[\![s \fatsemi t]\!]_{B \parr C_l} \subseteq [\![s \fatsemi t\upharpoonright(B \rightarrowtriangle D)]\!]_B$. On aura alors $[\![\sigma \fatsemi \tau \parr I_C]\!]_{B \parr C} \subseteq [\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B$.

Par ailleurs, si $s \in \sigma$ et $s' \in \tau$ sont tels que $s\upharpoonright B = t\upharpoonright B$ alors $s\upharpoonright(B \parr C) \neq \varepsilon$ (car s' est centrale) et il existe un élément $s'' \neq \varepsilon$ de I_C tel que $s''\upharpoonright(C_l) = s\upharpoonright C$ (conformément au lemme 4.27, il suffit de prendre $s'' = \mathrm{id}(s\upharpoonright C)$) et, d'après le lemme 4.43, il existe un élément t de $\tau \parr I_C$ tel que $t\upharpoonright(B \rightarrowtriangle D) = s'$ et $t\upharpoonright(B \parr C) = s\upharpoonright(B \parr C)$. Ainsi, on aura aussi que $[\![\sigma \fatsemi \tau]\!]_B \subseteq [\![\sigma \fatsemi \tau \parr I_C]\!]_{B \parr C}$.

Il suffit donc de montrer que si $s \in \sigma$ et $t \in \tau \parr I_C$ sont tels que $s\upharpoonright(B \parr C) = t\upharpoonright(B \parr C_l)$, alors $[\![s \fatsemi t]\!]_{B \parr C_l} \subseteq [\![s \fatsemi t\upharpoonright(B \rightarrowtriangle D)]\!]_B$.

Soient $s \in \sigma$ et $t \in \tau \parr I_C$ tels que $s\upharpoonright(B \parr C) = t\upharpoonright(B \parr C_l)$. On a

$$\begin{aligned} & s = (b_0^{\mathrm{O}}, c_0^{\mathrm{O}}) \cdot m \cdot (b_0^{\mathrm{J}}, c_0^{\mathrm{J}}) \\ \text{et} \quad & t = (d_0^{\mathrm{O}}, (r, c_0^{\mathrm{O}}))(b_0^{\mathrm{J}}, (l, c_0^{\mathrm{O}})) \cdot m' \cdot (b_0^{\mathrm{J}}, (l, c_0^{\mathrm{J}}))(d_0^{\mathrm{J}}, (r, c_0^{\mathrm{J}})) \\ \text{où} \quad & m' \in (C_l^{\mathrm{J}} \cdot C_r^{\mathrm{J}} \cdot C_r^{\mathrm{O}} \cdot C_l^{\mathrm{O}})^* \odot_{C_l \cup B} (B^{\mathrm{J}} \cdot (D^{\mathrm{J}} \cdot D^{\mathrm{O}})^* \cdot B^{\mathrm{O}})^* \end{aligned}$$

par le lemme 4.43 et le lemme 4.27.

En appliquant les équations définissant la coupure atomique (définition 4.17), et avec notre convention sur les délocalisations, on a alors :

$$\begin{aligned} [\![s \fatsemi t]\!]_{B \parr C} &= (d_0^{\mathrm{O}}, c_0^{\mathrm{O}}) \cdot f_{B \parr C}(m \cdot (b_0^{\mathrm{J}}, c_0^{\mathrm{J}}), (b_0^{\mathrm{O}}, (r, c_0^{\mathrm{O}})) \cdot m' \cdot (b_0^{\mathrm{J}}, c_0^{\mathrm{J}})(d^{\mathrm{J}}, (r, c_0^{\mathrm{J}}))) \\ [\![s \fatsemi t\upharpoonright(B \rightarrowtriangle D)]\!]_B &= (d_0^{\mathrm{O}}, c_0^{\mathrm{O}}) \cdot f_B(m \cdot (b_0^{\mathrm{J}}, c_0^{\mathrm{J}}), b_0^{\mathrm{O}} \cdot (m'\upharpoonright(B \rightarrowtriangle D)) \cdot b_0^{\mathrm{J}} \cdot d_0^{\mathrm{J}}). \end{aligned}$$

Où, si t' est un mot qui ne contient pas de coups de $B \parr C$, et si t'' est un mot qui ne contient pas de coups de $B \parr C_l$, alors

$$f_{B \parr C}(b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}} \cdot w, b^{\mathrm{J}} \cdot t'' \cdot b^{\mathrm{O}} \cdot w') = t'' \cdot f_{B \parr C}(b^{\mathrm{O}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot w') \tag{4.10}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_{B \parr C}(b^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w') = t' \cdot f_{B \parr C}(b^{\mathrm{J}} \cdot w, b^{\mathrm{J}} \cdot w') \tag{4.11}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_{B \parr C}(b^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot c^{\mathrm{J}} \cdot w, b^{\mathrm{O}} \cdot (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot w') = t' \cdot f_{B \parr C}(c^{\mathrm{J}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot w') \tag{4.12}$$

$$f_{B \parr C}(b^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot (b^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}), b^{\mathrm{O}}(b^{\mathrm{J}}, (l, c^{\mathrm{J}})) \cdot w' \cdot (d^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}})) = t' \cdot w' \cdot (d^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}) \tag{4.13}$$

$$f_{B \parr C}(c^{\mathrm{J}} c^{\mathrm{O}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot t'' \cdot (l, c^{\mathrm{O}}) \cdot w') = t'' \cdot f_{B \parr C}(c^{\mathrm{O}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{O}}) \cdot w') \tag{4.14}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_{B \parr C}(c^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot c^{\mathrm{J}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{O}}) \cdot (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot w') = t' \cdot f_{B \parr C}(c^{\mathrm{J}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot w') \tag{4.15}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_{B \parr C}(c^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{O}}) \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot w') = t' \cdot f_{B \parr C}(c^{\mathrm{J}} \cdot w, (l, c^{\mathrm{J}}) \cdot w') \tag{4.16}$$

$$f_{B \parr C}(c^{\mathrm{O}} \cdot t' \cdot (b^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}), c^{\mathrm{O}}(b^{\mathrm{J}}, (l, c^{\mathrm{J}})) \cdot w' \cdot (d^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}})) = t' \cdot w' \cdot (d^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}) \tag{4.17}$$

et, si r est un mot qui ne contient pas de coups de B, alors

$$f_B(b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}} \cdot p, b^{\mathrm{J}} \cdot r \cdot b^{\mathrm{O}} \cdot p') = r \cdot f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot p, b^{\mathrm{O}} \cdot p') \tag{4.18}$$

$$\text{si } r \neq \varepsilon, \quad f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot r \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot p, b^{\mathrm{O}} \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot p') = r \cdot f_B(b^{\mathrm{J}} \cdot p, b^{\mathrm{J}} \cdot p') \tag{4.19}$$

$$f_B(b^{\mathrm{O}} \cdot r \cdot (b^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}), b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}} \cdot r' \cdot d^{\mathrm{J}}) = r \cdot p' \cdot (d^{\mathrm{J}}, c^{\mathrm{J}}). \tag{4.20}$$

Mais le seul cas d'application de l'équation (4.14), pour le calcul de $[\![s \,;\, t]\!]_{B⅋C}$ est lorsque $t'' = c^{\mathsf{J}}c^{\mathsf{O}}$. Par ailleurs, dans t, toute occurrence d'un coup (l, c^{O}) est toujours immédiatement suivie d'une occurrence d'un coup (l, c^{J}) ou de l'occurrence d'un coup $(b^{\mathsf{J}}, (l, c^{\mathsf{J}}))$. Ainsi les équations (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17) peuvent être remplacées par les trois équations :

$$f_{B⅋C}(c^{\mathsf{J}}c^{\mathsf{O}} \cdot t' \cdot b^{\mathsf{J}} \cdot w, (l, c^{\mathsf{J}}) \cdot c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot (l, c^{\mathsf{O}}) \cdot w') = c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot t' \cdot f_{B⅋C}(b^{\mathsf{J}} \cdot w, w') \tag{4.21}$$

$$f_{B⅋C}(c^{\mathsf{J}}c^{\mathsf{O}} \cdot t' \cdot c'^{\mathsf{J}} \cdot w, (l, c^{\mathsf{J}}) \cdot c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot (l, c^{\mathsf{O}}) \cdot w') = c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot t' \cdot f_{B⅋C}(c'^{\mathsf{J}} \cdot w, w') \tag{4.22}$$

$$f_{B⅋C}(c^{\mathsf{J}}c^{\mathsf{O}} \cdot t' \cdot (b^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}}), (l, c^{\mathsf{J}}) \cdot c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot (l, c^{\mathsf{O}}) \cdot (b^{\mathsf{J}}, (l, c_0^{\mathsf{J}})) \cdot w' \cdot (d^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}})) = c^{\mathsf{O}}c^{\mathsf{J}} \cdot t' \cdot w' \cdot (d^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}}). \tag{4.23}$$

En recombinant ces trois dernières équations avec les équations (4.10), (4.11), (4.12) et (4.13), on obtient finalement que les équations :

$$f_{B⅋C}(b^{\mathsf{J}}b^{\mathsf{O}} \cdot w, b^{\mathsf{J}} \cdot t'' \cdot b^{\mathsf{O}} \cdot w') = t''{\restriction}D \cdot f_{B⅋C}(b^{\mathsf{O}} \cdot w, b^{\mathsf{O}} \cdot w') \tag{4.24}$$

$$\text{si } w \neq \varepsilon, \quad f_{B⅋C}(b^{\mathsf{O}} \cdot t' \cdot b^{\mathsf{J}} \cdot w, b^{\mathsf{O}} \cdot b^{\mathsf{J}} \cdot w') = t' \cdot f_{B⅋C}(b^{\mathsf{J}} \cdot w, b^{\mathsf{J}} \cdot w') \tag{4.25}$$

$$f_{B⅋C}(b^{\mathsf{O}} \cdot t' \cdot (b^{\mathsf{J}}, c^{\mathsf{J}}), b^{\mathsf{O}} \cdot t'' \cdot (b^{\mathsf{J}}, (l, c^{\mathsf{J}})) \cdot w' \cdot (d^{\mathsf{J}}, c^{\mathsf{J}})) = t' \cdot (t''{\restriction}D) \cdot w' \cdot (d^{\mathsf{J}}, c^{\mathsf{J}}) \tag{4.26}$$

où t' et t'' sont des mots ne contenant pas de coups de B, suffisent à définir

$$f_{B⅋C}(m \cdot (b_0^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}}), (b_0^{\mathsf{O}}, (r, c_0^{\mathsf{O}})) \cdot m' \cdot (b_0^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}})(d^{\mathsf{J}}, (r, c_0^{\mathsf{J}}))).$$

On déduit de ces trois dernières équations et des équations (4.18), (4.19) et (4.20) que

$$\begin{aligned} &f_{B⅋C}(m \cdot (b_0^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}}), (b_0^{\mathsf{O}}, (r, c_0^{\mathsf{O}})) \cdot m' \cdot (b_0^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}})(d^{\mathsf{J}}, (r, c_0^{\mathsf{J}}))) \\ &\quad = f_B(m \cdot (b_0^{\mathsf{J}}, c_0^{\mathsf{J}}), b_0^{\mathsf{O}} \cdot (m'{\restriction}(B \multimap D)) \cdot b_0^{\mathsf{J}} \cdot d_0^{\mathsf{J}}). \end{aligned}$$

D'où, finalement, $[\![s \,;\, t]\!]_{B⅋C} = [\![s \,;\, t{\restriction}(B \multimap D)]\!]_B$, ce qui conclut. □

En utilisant l'associativité de la composition, la monoïdalité de $\mathbf{JNLC}(⅋, \perp)$ et la proposition 4.47 on obtient un résultat d'associativité de la composition.

Proposition 4.48 (associativité de la coupure). *Soient $A, B, C, D_1, \ldots, D_k, \ldots, D_m, \ldots, D_n$ des jeux négatifs deux à deux disjoints et soient $\sigma : A \multimap (B ⅋ D_1 ⅋ \ldots ⅋ D_k)$, $\tau_1 : B \dot{\multimap} (C ⅋ D_{k+1} ⅋ \ldots ⅋ D_m)$ et $\tau_2 : C \multimap (D_{m+1} ⅋ \ldots ⅋ D_n)$. Alors*

$$[\![[\![\sigma \,;\, \tau_1]\!]_B \,;\, \tau_2]\!]_C = [\![\sigma \,;\, [\![\tau_1 \,;\, \tau_2]\!]_C]\!]_B.$$

Par ailleurs, par monoïdalité symétrique de $\mathbf{JNLC}(⅋, \perp)$ on peut clairement étendre la définition de la coupure en une coupure entre morphismes de type $A \multimap C_1 ⅋ B ⅋ C_2$ et morphismes centraux de type $B \dot{\multimap} D$.

Dans ce résultat d'associativité et dans cette extension de la définition de la coupure, les conditions de centralité peuvent en fait être relaxées (mais nous n'aurons pas besoin d'une telle généralité).

On introduit trois opérations de décalage sur les stratégies.

Définition 4.49. Si σ est une stratégie de $A \multimap (B_1 ⅋ \ldots ⅋ B_n)$ alors

$$\uparrow \sigma = \{(*, b_1^{\mathsf{O}}, \ldots, b_n^{\mathsf{O}}) \cdot m \cdot (*', b_1^{\mathsf{J}}, \ldots, b_n^{\mathsf{J}}) \mid (b_1^{\mathsf{O}}, \ldots, b_n^{\mathsf{O}}) \cdot m \cdot (b_1^{\mathsf{J}}, \ldots, b_n^{\mathsf{J}}) \in \sigma\}$$

(que nous noterons parfois $\uparrow_A \sigma$) est une stratégie de $\uparrow A^{\perp} ⅋ B_1 ⅋ \ldots ⅋ B_n$.

Si σ est une stratégie de $\uparrow A^{\perp} ⅋ B_1 ⅋ \ldots ⅋ B_n$ alors

$$\overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma = \{(b_1^{\mathsf{O}}, \ldots, b_n^{\mathsf{O}}) \cdot m \cdot (b_1^{\mathsf{J}}, \ldots, b_n^{\mathsf{J}}) \mid (*, b_1^{\mathsf{O}}, \ldots, b_n^{\mathsf{O}}) \cdot m \cdot (*', b_1^{\mathsf{J}}, \ldots, b_n^{\mathsf{J}}) \in \sigma\}$$

est une stratégie de $A \multimap\!\!\triangleright (B_1 \parr \ldots \parr B_n)$.

Si σ est une stratégie de $A \parr B_1 \parr \ldots \parr B_n$ alors

$$\downarrow_A \sigma = \{(b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}) *^{\mathrm{J}} a^{\mathrm{O}} \cdot m \cdot a^{\mathrm{J}} *'^{\mathrm{O}} (b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}) \mid (a^{\mathrm{O}}, b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}) \cdot m \cdot (a^{\mathrm{J}}, b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}) \in \sigma\}.$$

est une stratégie centrale de $\uparrow A^\perp \multimap\!\!\triangleright (B_1 \parr \ldots \parr B_n)$.

Les opérations $\uparrow$ et $\uparrow_A^{-1}$ correspondent à une composition respectivement avec l'isomorphisme $A \multimap\!\!\triangleright (B_1 \parr \ldots \parr B_n) \cong \uparrow A^\perp \parr B_1 \parr \ldots \parr B_n$ et sa réciproque.

Il est facile de vérifier que $\downarrow_A \sigma$ est bien une stratégie centrale de $\uparrow A^\perp \multimap\!\!\triangleright (B_1 \parr \ldots \parr B_n)$.

Lemme 4.50.
Si σ est une stratégie de $A \multimap\!\!\triangleright B_1$ et si τ est une stratégie de $A \parr B_2 \parr \ldots \parr B_n$ alors $[\![\uparrow \sigma \mathbin{;} \downarrow_A \tau]\!]_{\uparrow A^\perp} = [\![\tau \mathbin{;} \sigma]\!]_A$.

La vérification est directe.

4.2 Un modèle de MALLP

Dans le calcul des séquents de MALLP, les formules négatives sont notée par les lettres $N, N', N_i, \ldots$ et les formules positives $N^\perp, N'^\perp, N_0{}^\perp$. Pour les contextes, on réserve la notation Γ pour un contexte qui peut être de la forme $N_0{}^\perp, N_1, \ldots, N_k$ (contexte positif) aussi bien que de la forme $N_1, \ldots, N_k$ (contexte négatif) et on utilise la notation $\mathcal{N}$ pour les contextes négatifs.

Formules. On interprète les formules négatives par des jeux négatifs linéaires bien terminés et les formules positives par des jeux positifs linéaires bien terminés... comme on s'y attend ! On note $[A]_{\mathrm{JP}}$ l'interprétation d'une formule A.

Contextes. Un contexte positif $N^\perp, N_1, \ldots, N_n$ est interprété par le jeu linéaire $[N]_{\mathrm{JP}} \multimap\!\!\triangleright \perp$ si $n = 0$ et $[N]_{\mathrm{JP}} \multimap\!\!\triangleright [N_1 \parr \ldots \parr N_n]_{\mathrm{JP}}$ sinon. Un contexte négatif $N_1, \ldots, N_n$ est interprété par le jeu négatif linéaire $[N_1 \parr \ldots \parr N_n]_{\mathrm{JP}}$.

Preuves. L'interprétation $[\pi]_{\mathrm{JP}}$ d'une preuve π d'un séquent $\vdash \Gamma$ est une stratégie de l'interprétation $[\Gamma]_{\mathrm{JP}}$ du contexte Γ, centrale si le contexte Γ est positif. Cette interprétation est définie inductivement sur la dernière règle de la preuve comme suit.

Pour plus de commodités on note avec les mêmes symboles ($N, N', N_i, N^\perp, \ldots$) la formule et le jeu qui l'interprète.

Pour gérer l'ajout/suppression de la formule $\perp$ requise pour l'interprétation des contextes ne contenant qu'une formule positive, on introduit les opérations suivantes.

Définition 4.51. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\sigma : (A \multimap\!\!\triangleright) B_1 \parr \ldots \parr B_n$ alors $F_\perp(\sigma) : (A \multimap\!\!\triangleright) B_1 \parr \ldots B_n \parr \perp$ est égale à

$$F_\perp(\sigma) = \{(b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}, *) \cdot m \cdot (b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}, *') \mid (b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}) \cdot m \cdot (b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}) \in \sigma\}.$$

Si $\sigma : (A \multimap\!\!\triangleright) B_1 \parr \ldots \parr B_n \parr \perp$ alors $G_\perp(\sigma) : (A \multimap\!\!\triangleright) B_1 \parr \ldots \parr B_n$ est égale à

$$G_\perp(\sigma) = \{(b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}) \cdot m \cdot (b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}) \mid (b_1^{\mathrm{O}}, \ldots, b_n^{\mathrm{O}}, *) \cdot m \cdot (b_1^{\mathrm{J}}, \ldots, b_n^{\mathrm{J}}, *') \in \sigma\}.$$

Ces deux opération correspondent aux deux composantes de l'isomorphisme $C \cong C \parr \perp$. Et on a alors $G_\perp(F_\perp(\sigma)) = \sigma$.

Groupe identité

L'axiome est interprété par l'identité :

$$\left[\frac{}{\vdash N^\perp, N}\,(ax.)\right]_{\text{JP}} = I_N : N \dot{\rightarrow} N.$$

Pour la coupure

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma, N} \qquad \cfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots N_n}}{\vdash \Gamma, N_1, \ldots, N_n}\,(cut)$$

il y a deux cas :

- si $n \geq 1$ ou si $n = 0$ et Γ ne contient pas de formule négative alors
$$[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi (I_{N_1 \parr \ldots \parr N_k} \parr [\pi_1]_{\text{JP}}) = [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_N,$$
- si $n = 0$ et Γ contient au moins une formule négative, alors
$$[\pi]_{\text{JP}} = G_\perp([\![[\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_N).$$

Additifs

L'interprétation de la règle *top* est la stratégie vide

$$\left[\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\,(top)\right]_{\text{JP}} = \emptyset$$

que Γ contienne ou non une formule positive.

Pour la règle *avec*, si π est la preuve

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma, N} \qquad \cfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash \Gamma, N'}}{\vdash \Gamma, N \& N'}\,(avec)$$

alors $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}} \cup [\pi_2]_{\text{JP}}$ (où $[N]_{\text{JP}}$ et $[N']_{\text{JP}}$ sont des jeux disjoints).

Pour la règle *plus*, si π est la preuve

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_n}}{\vdash (N \& N')^\perp, N_1, \ldots, N_n}\,(plus)$$

alors $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}}$.

Multiplicatifs

Pour la règle *bot*, si π est la preuve

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, \perp}\,(bot)$$

alors $[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}})$ si Γ contient une formule négative et à $[\pi_1]_{\text{JP}}$ sinon.

Pour la règle *par*, si π est la preuve

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma, N, N'}}{\vdash \Gamma, N \parr N'}\,(par)$$

on a simplement $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}}$.

Pour la règle *un*, on pose

$$\left[\frac{}{\vdash 1}\,(un)\right]_{\text{JP}} = I_\perp : \perp \dot{\multimap} \perp.$$

Pour la règle *tenseur*, si π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N'^\perp, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash (N \parr N')^\perp, N_1, \ldots, N_n}\,(tens.)$$

alors $[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $[\pi_1]_{\text{JP}} \parr [\pi_2]_{\text{JP}}$ lorsque $n > k > 0$ et à $G_\perp([\pi_1]_{\text{JP}} \parr [\pi_2]_{\text{JP}})$ sinon. Dans les deux cas on a bien $[\pi]_{\text{JP}} : (N \parr N') \dot{\multimap} (N_1 \parr \ldots \parr N_n)$.

Décalages

Dans le cas où π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash \uparrow(N^\perp), N_1, \ldots, N_k}\,\uparrow$$

$[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $\uparrow [\pi_1]_{\text{JP}}$ si $k > 0$ et à $G_\perp(\uparrow [\pi_1]_{\text{JP}}) = [\pi_1]_{\text{JP}}$ sinon.

Et dans le cas où π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash (\uparrow N)^\perp, N_1, \ldots, N_k}\,\downarrow$$

$[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $\downarrow_N [\pi_2]_{\text{JP}}$ si $k > 0$ et $\downarrow_N F_\perp([\pi_2]_{\text{JP}})$ sinon.

4.2.1 Correction

On montre l'invariance par élimination des coupures pour le cas de preuves ne manipulant que des séquents qui contiennent au moins une formule négative. Le cas général se traite de la même manière mais en tenant compte de la gestion de l'ajout/suppression d'une formule $\perp$ dans les interprétations de contextes. Les cas de commutations de règles se traitent de manière standard. Nous ne traitons que les cas clés.

Coupure contre un axiome

Il y a deux cas pour cette coupure. Soit on élimine la coupure dans la preuve π :

$$\dfrac{(ax.)\,\dfrac{}{\vdash N^\perp, N} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_n}}{\vdash N_1, \ldots, N_n}\,(cut)$$

et elle se réduit en π_2. Dans ce cas $[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $[\![I_N \,\mathbin{;}\, [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_N$ et est donc bien égal à $[\pi_2]_{\text{JP}}$.

Soit on élimine la coupure dans la preuve π

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma, N} \qquad \dfrac{}{\vdash N^\perp, N}\,(ax.)}{\vdash \Gamma}\,(cut)$$

et elle se réduit en π_1. Dans ce cas $[\pi]_{\text{JP}} = [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \,\mathbin{;}\, I_N]\!]_N$ qui est bien égal à $[\pi_1]_{\text{JP}}$.

Coupures contre des règles de constantes

Coupure contre une règle *top* sur une formule différente du $\top$ qu'introduit cette règle (autrement il s'agit d'une coupure contre une règle axiome ou contre une autre règle *top*). Si π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \Gamma, N, \top}\,(\mathit{top}) \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^{\perp}, N_1, \ldots, N_n}}{\vdash \Gamma, N_1, \ldots, N_n, \top}\,(\mathit{cut})$$

cette preuve se réduit en π'

$$\dfrac{}{\vdash \Gamma, N_1, \ldots, N_n, \top}\,(\mathit{top})$$

et on a $[\pi]_{\text{JP}} = [\![\emptyset \mathbin{;} [\pi_1]_{\text{JP}}]\!]_N = \emptyset$ qui est bien $[\pi']_{\text{JP}}$. De même si la formule coupée est positive dans le séquent introduit par la règle *top* (dans ce cas on utilise $[\![[\pi_1]_{\text{JP}} \mathbin{;} \emptyset]\!]_N = \emptyset$).

Coupure entre une règle 1 et une règle *bot*. Si π est la preuve :

$$\dfrac{(\mathit{bot})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, \perp} \qquad \dfrac{}{\vdash 1}\,(\mathit{un})}{\vdash \Gamma}\,(\mathit{cut})$$

qui se réduit en π_1, on a bien $[\pi]_{\text{JP}} = G_{\perp}([\![I_{\perp} \mathbin{;} F_{\perp}([\pi_1]_{\text{JP}})]\!]_N) = G_{\perp}(F_{\perp}([\pi_1]_{\text{JP}})) = [\pi_1]_{\text{JP}}$.

Décalages

Si π est la preuve :

$$\dfrac{\uparrow\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^{\perp}, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash \uparrow(N^{\perp}), N_{k+1}, \ldots, N_n} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash \downarrow N, N_1, \ldots, N_k}\downarrow}{\vdash N_1, \ldots, N_n}\,(\mathit{cut})$$

alors $[\pi]_{\text{JP}} = [\![\uparrow [\pi_1]_{\text{JP}} \mathbin{;} \downarrow_N [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_{\uparrow N^{\perp}}$ et par le lemme 4.50, $[\pi]_{\text{JP}} = [\![[\pi_2]_{\text{JP}} \mathbin{;} [\pi_1]_{\text{JP}}]\!]_N$ qui est bien l'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N_1, \ldots, N_n} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N^{\perp}, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash N_1, \ldots, N_n.}\,(\mathit{cut})$$

Additifs

Si π est la preuve

$$\dfrac{(\mathit{avec})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N_1, \ldots, N_k} \quad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N', N_1, \ldots, N_k}}{\vdash N \mathbin{\&} N', N_1, \ldots, N_k} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_3}{\vdash N^{\perp}, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash N^{\perp} \oplus N'^{\perp}, N_{k+1}, \ldots, N_n}\,(\mathit{plus})}{\vdash N_1, \ldots, N_n}\,(\mathit{cut})$$

alors son interprétation est

$$\begin{aligned} [\pi]_{\text{JP}} &= [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \cup [\pi_2]_{\text{JP}} \mathbin{;} [\pi_3]_{\text{JP}}]\!]_{N\&N'} \\ &= [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \mathbin{;} [\pi_3]_{\text{JP}}]\!]_N \end{aligned}$$

et c'est donc bien l'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N_1, \ldots, N_k} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N^\perp, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash N_1, \ldots, N_n.}\;(\mathit{cut})$$

Multiplicatifs

Si π est la preuve

$$\dfrac{(\mathit{par})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N', N_{m+1}, \ldots, N_n}}{\vdash N \parr N', N_{m+1}, \ldots, N_n} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k} \quad \dfrac{\vdots\,\pi_3}{\vdash N'^\perp, N_{k+1}, \ldots, N_m}}{\vdash N^\perp \otimes N'^\perp, N_1, \ldots, N_m}\;(\mathit{tens.})}{\vdash N_1, \ldots, N_n}\;(\mathit{cut})$$

alors son interprétation est

$$\begin{aligned}
[\pi]_{\text{JP}} &= [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi [\pi_2]_{\text{JP}} \parr [\pi_3]_{\text{JP}}]\!]_{N \parr N'} \\
&= [\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi ([\pi_2]_{\text{JP}} \parr [\pi_3]_{\text{JP}} \parr I_{N_{m+1} \parr \ldots \parr N_n}) \\
&= [\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi (((I_N \parr [\pi_3]_{\text{JP}}) \fatsemi ([\pi_2]_{\text{JP}} \parr I_{N_{k+1} \parr \ldots \parr N_m})) \parr I_{N_{m+1} \parr \ldots \parr N_n}) \\
&= [\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi (I_N \parr [\pi_3]_{\text{JP}} \parr I_{N_{m+1} \parr \ldots \parr N_n}) \fatsemi ([\pi_2]_{\text{JP}} \parr I_{N_{k+1} \parr \ldots \parr N_m} \parr I_{N_{m+1} \parr \ldots \parr N_n}) \\
&= [\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi ([\pi_3]_{\text{JP}} \parr I_{N \parr N_{m+1} \parr \ldots \parr N_n}) \fatsemi ([\pi_2]_{\text{JP}} \parr I_{N_{k+1} \parr \ldots \parr N_n}) \\
&= [\![[\![[\pi_1]_{\text{JP}} \fatsemi [\pi_3]_{\text{JP}}]\!]_{N'} \fatsemi [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_N
\end{aligned}$$

qui est bien l'interprétation de la preuve

$$\dfrac{(\mathit{cut})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N', N_{m+1}, \ldots, N_n} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_3}{\vdash N'^\perp, N_{k+1}, \ldots, N_m}}{\vdash N, N_{k+1}, \ldots, N_m} \qquad \dfrac{\vdots\,\pi_2}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash N_1, \ldots, N_n}\;(\mathit{cut})$$

Et de même pour le cas où le séquent prouvé par π_1 contient une formule positive.

4.2.2 Réversibilité

Les jeux polarisés à bord et les constructions utilisées dans les jeux polarisés à bord présentent une symétrie entre les débuts de parties terminées et les fins de parties terminées. Dans cette section nous donnons un contenu mathématique à cette remarque. Nous obtenons ainsi une propriété de réversibilité qui montre que le renversement du temps dans un jeu, opération qui consiste à lire les parties à partir de la fin vers le début, correspond au passage à l'orthogonal sur l'interprétation des formules. Ce résultat s'étend à l'interprétation des preuves au sens ou le renversement de l'interprétation d'une preuve est elle-même (à isomorphisme près). Nous n'avons pas d'interprétation précise à donner cette propriété. Il nous semble juste entrevoir quelques pistes à ce sujet dont nous discuterons au chapitre 7.

Définition 4.52 (jeu symétrisé). Le *symétrisé* $\overset{\curvearrowleft}{A}$ d'un jeu polarisé est défini par $\epsilon_{\overset{\curvearrowleft}{A}} = -\epsilon_A$, $\overset{\curvearrowleft}{A}^{\mathrm{O}} = A^{\mathrm{O}}$, $\overset{\curvearrowleft}{A}^{\mathrm{J}} = A^{\mathrm{J}}$ et $S_{\overset{\curvearrowleft}{A}} = \{ \overset{\curvearrowleft}{s} \mid s \in S_A \}$ où $\overset{\curvearrowleft}{\varepsilon} = \varepsilon$ et $(s \cdot a)^{\curvearrowleft} = a \cdot \overset{\curvearrowleft}{s}$.

Si m et s sont des mots disjoints de longueur paire on a $\overset{\curvearrowleft}{m} \odot \overset{\curvearrowleft}{s} = \{ \overset{\curvearrowleft}{p} \mid p \in m \odot s \}$. Ainsi si E et F sont des ensembles de mots de longueurs paires sur des alphabets disjoints on a $(E \odot F)^{\curvearrowleft} = \overset{\curvearrowleft}{E} \odot \overset{\curvearrowleft}{F}$ où $\overset{\curvearrowleft}{S}$ désigne $\{ \overset{\curvearrowleft}{s} \mid s \in S \}$. Cette propriété s'étend facilement à la construction $\odot_{B_1 \cup B_2}$. En utilisant cette remarque pour les construction multiplicatives on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.53. *Soient A et B des jeux négatifs et P et Q des jeux positifs.*

- *Le symétrisé d'un jeu linéaire est un jeu linéaire et le symétrisé d'un jeu affine est un jeu affine ;*
- $\overset{\frown}{\overset{\frown}{A}} = A$ *et* $\overset{\frown}{\overset{\frown}{P}} = P$ *;*
- $\overset{\frown}{\top} = 0$ *et* $\overset{\frown}{\bot} \cong_f 1$ *;*
- $(\downarrow A)^{\frown} \cong_f \uparrow \overset{\frown}{A}$ *;*
- *si on identifie l'élément $*$ et l'élément $*'$ les isomorphismes forts précédents sont des égalités ;*
- $(A \,\&\, B)^{\frown} = \overset{\frown}{A} \oplus \overset{\frown}{B}$ *;*
- $(A \parr B)^{\frown} = \overset{\frown}{A} \otimes \overset{\frown}{B}$ *;*
- *si F est une formule de* MALLP *sans atomes alors $[F]_{\mathrm{JP}}{}^{\perp} \cong_f ([F]_{\mathrm{JP}})^{\frown}$. De plus si, pour chaque atome α, $([\alpha]_{\mathrm{JP}})^{\frown} \cong_f [\alpha]_{\mathrm{JP}}{}^{\perp}$ alors on a encore $[F]_{\mathrm{JP}}{}^{\perp} \cong_f ([F]_{\mathrm{JP}})^{\frown}$ pour une formule F avec atomes.*

Définition 4.54 (jeu polarisé bien commencé). Un jeu polarisé A est dit bien commencé lorsque les éléments de $S/\{\varepsilon\}$ sont deux à deux incomparables *pour l'ordre suffixe*.

Autrement dit, un jeu polarisé est bien commencé lorsque son symétrisé est bien terminé.

Corollaire 4.55. *Les jeux interprétant les formules de* MALLP *sont bien commencés.*

Démonstration. Si F est une formule de MALLP, l'interprétation de $F^{\perp}$ est un jeu bien terminé et ce jeu est fortement isomorphe au symétrisé du jeu interprétant F. Le symétrisé de $[F]_{\mathrm{JP}}$ est donc bien terminé ce qui implique que le jeu $[F]_{\mathrm{JP}}$ est bien commencé. ☐

Proposition 4.56 (Réversibilité des preuves). *Si π est une preuve de* MALLP *sans atomes et si $p \in [\pi]_{\mathrm{JP}}$ alors $\overset{\frown}{p}$ où l'on échange héréditairement $*$ et $*'$ est aussi un élément de $[\pi]_{\mathrm{JP}}$ et donc $([\pi]_{\mathrm{JP}})^{\frown}$ est égal à $[\pi]_{\mathrm{JP}}$ à l'échange héréditaire de $*$ et $*'$ près.*

Cette proposition s'étend aux atomes α dont l'interprétation $[\alpha]_{\mathrm{JP}}$ vérifie qu'il existe une bijection f entre l'ensemble des coups opposant et l'ensemble des coups joueur de $[\alpha]_{\mathrm{JP}}$ telle que pour tout $a_1 \dots a_{2n} \in S_{[\alpha]_{\mathrm{JP}}}$ on a $f(a_{2n}) \dots f(a_1) \in S_{[\alpha]_{\mathrm{JP}}}$.

Démonstration de la proposition. Nous commençons par détailler ce que signifie d'échanger héréditairement $*$ et $*'$ dans une partie terminée de l'interprétation d'un séquent. On note f l'application d'échange héréditaire des éléments $*$ et $*'$. On a alors que $f(*) = *'$, $f(*') = *$, $f(l) = l$, $f(r) = r$, $f((a, b)) = (f(a), f(b))$, et $f(a \cdot m) = f(a) \cdot f(m)$. Ceci suffit à traiter toutes les parties terminées que nous pouvons rencontrer dans un séquent.

Nous faisons la démonstration par induction sur la hauteur de la preuve π en fonction de sa dernière règle. Par correction du modèle nous pouvons ne considérer que des preuves sans coupures.

Si la dernière règle est une règle *top* l'interprétation de π est vide et la propriété est donc vérifiée.

Si la dernière règle est *bot*, π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, \bot.}\ (bot)$$

et $[\pi]_{\mathrm{JP}}$ est égal à $\{F_{\bot}\, s \mid s \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}}\}$ si Γ contient une formule négative et a $[\pi_1]_{\mathrm{JP}}$ sinon. Dans le second cas il n'y a rien à faire. Reste le premier cas. Soit $p \in [\pi]_{\mathrm{JP}}$. Par définition de $F_{\bot}$, $p = (a_1, \dots, a_k, *) \cdot m \cdot (a'_1, \dots, a'_k, *')$ avec $(a_1, \dots, a_k) \cdot m \cdot (a'_1, \dots, a'_k) \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}}$.

Donc $f(\overset{\frown}{p}) = (f(a'_1), \ldots, f(a'_k), *) \cdot f(\overset{\frown}{m}) \cdot (f(a_1), \ldots, f(a_k), *')$. Par hypothèse d'induction, $(f(a'_1), \ldots, f(a'_k)) \cdot f(\overset{\frown}{m}) \cdot (f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}}$ donc

$$F_\perp((f(a'_1), \ldots, f(a'_k)) \cdot f(\overset{\frown}{m}) \cdot (f(a_1), \ldots, f(a_k))) = \\ (f(a'_1), \ldots, f(a'_k), *) \cdot f(\overset{\frown}{m}) \cdot (f(a_1), \ldots, f(a_k), *')$$

est bien un élément de $[\pi]_{\mathrm{JP}}$. Ainsi $f(\overset{\frown}{p})$ est bien un élément de $[\pi]_{\mathrm{JP}}$. Ceci montre aussi que $f((F_\perp\, s)^{\frown}) = F_\perp(f(\overset{\frown}{s}))$.

Si la dernière règle est une règle *un*, on a $[\pi]_{\mathrm{JP}} = I_\perp$ et l'égalité est directe.

Si la dernière règle est une règle *avec* alors π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash \Gamma, N} \qquad \dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash \Gamma, N'}}{\vdash \Gamma, N \& N'}\ (\textit{avec})$$

et $[\pi]_{\mathrm{JP}} = [\pi_1]_{\mathrm{JP}} \cup [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$ où $[N]_{\mathrm{JP}}$ et $[N']_{\mathrm{JP}}$ sont pris disjoints. Le seul cas à traiter est alors celui où $[N]_{\mathrm{JP}}$ et $[N']_{\mathrm{JP}}$ ne sont pas disjoints dans l'interprétation de $\vdash \Gamma, N$ et $\vdash \Gamma, N'$. Dans ce cas les égalités $f((l, a)) = (l, f(a))$ et $f((r, a)) = (r, f(a))$ permettent d'établir la propriété pour $[\pi_1]_{\mathrm{JP}}$ où l'interprétation de N est remplacée par sa délocalisation en l et pour $[\pi_2]_{\mathrm{JP}}$ où l'interprétation de N' est délocalisée en r. Et ceci permet de conclure.

Si la dernière règle est un *plus*, alors π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_n}}{\vdash (N \& N')^\perp, N_1, \ldots, N_n}\ (\textit{plus})$$

et la propriété est immédiate en traitant éventuellement les délocalisations comme pour le *avec*.

Si la dernière règle est un *par*, il n'y a rien à faire.

Si la dernière règle est un *tenseur* alors π est la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k} \qquad \dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash N'^\perp, N_{k+1}, \ldots, N_n}}{\vdash (N \parr N')^\perp, N_1, \ldots, N_n}\ (\textit{tens.})$$

et $[\pi]_{\mathrm{JP}}$ est égal à $[\pi_1]_{\mathrm{JP}} \parr [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$ si $n > k > 0$ et $G_\perp([\pi_1]_{\mathrm{JP}} \parr [\pi_2]_{\mathrm{JP}})$ sinon. On traite ce second cas comme le premier en utilisant le fait que $f((G_\perp(s))^{\frown}) = G_\perp(f(\overset{\frown}{s}))$ qui se montre facilement. Ici encore il faut tenir compte des éventuelles délocalisations de $[N]_{\mathrm{JP}}$ et $[N']_{\mathrm{JP}}$ en les traitant dans l'interprétation de π_1 et dans celle de π_2. Ces précautions prises nous avons à démontrer que si $p \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}} \parr [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$ alors $f(\overset{\frown}{p}) \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}} \parr [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$. Comme p appartient à $[\pi_1]_{\mathrm{JP}} \parr [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$, par le lemme 4.43, il existe $\gamma \cdot s \cdot \gamma' \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}}$ et $\delta \cdot t \cdot \delta' \in [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$ tels que $p \in (\gamma, \delta) \cdot (s \odot_{N \cup N'} t) \cdot (\gamma', \delta')$. Mais on a $(s \odot_{N \cup N'} t)^{\frown} = \overset{\frown}{s} \odot_{N \cup N'} \overset{\frown}{t}$. Donc $f(\overset{\frown}{p})$ est un élément de $(f(\gamma'), f(\delta')) \cdot (f(\overset{\frown}{s}) \odot_{N \cup N'} f(\overset{\frown}{t})) \cdot (f(\gamma), f(\delta))$. Par hypothèse d'induction, $f(\gamma') \cdot f(\overset{\frown}{s}) \cdot f(\gamma) \in [\pi_1]_{\mathrm{JP}}$ et $f(\delta') \cdot f(\overset{\frown}{s}) \cdot f(\delta) \in [\pi_2]_{\mathrm{JP}}$. Donc $f(\overset{\frown}{p})$ est bien un élément de $[\pi]_{\mathrm{JP}}$.

Si la dernière règle est un décalage négatif alors π est la preuve π_1

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash N^\perp, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash {\uparrow}(N^\perp), N_1, \ldots, N_k}\ \uparrow$$

et $[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $\uparrow[\pi_1]_{\text{JP}}$ si $k > 0$ et $G_\perp(\uparrow[\pi_1]_{\text{JP}}) = [\pi_1]_{\text{JP}}$ sinon. On conclut immédiatement, en utilisant le fait que $\uparrow$ a la même action sur les mots que $F_\perp$.

Si la dernière règle est un décalage positif alors π est la preuve

$$\cfrac{\cfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash N, N_1, \ldots, N_k}}{\vdash (\uparrow N)^\perp, N_1, \ldots, N_k}\,\downarrow$$

et $[\pi]_{\text{JP}}$ est égal à $\downarrow_N [\pi_2]_{\text{JP}}$ si $k > 0$ et $\downarrow_N [F_\perp\, \pi_2]_{\text{JP}}$ sinon. On montre alors facilement que $f((\downarrow_N p)^\frown) = \downarrow_N(f(\widehat{p}))$ pour tout p respectivement élément de $[\pi_2]_{\text{JP}}$ ou de $G_\perp([\pi_2]_{\text{JP}})$. Ce qui permet de conclure. $\square$

4.2.3 Écrasement sur le modèle relationnel

Dans [Bai99], P. Baillot étudie l'*écrasement*, par oubli du temps, d'un modèle de jeux de MELL sur un modèle statique proche du modèle relationnel. L'approche choisie est la présentation d'un modèle de jeux standard (à la Abramsky-Jagadeesan-Malacaria) et la construction d'un modèle statique adéquate (une part de ce travail de P. Baillot a été effectué en collaboration avec V. Danos, T. Ehrhard et L. Regnier, [BDER97]). La comparaison entre modèle dynamique et modèle statique est donc faite pour un nouveau modèle statique.

Nous avons ici adopté une autre approche, dictée par les résultats de déploiement d'hypercohérences, où la comparaison entre modèle statique et modèle dynamique est faite pour un nouveau modèle dynamique. Nous avons défini un modèle de jeux différent des modèles standards, puisque polarisé et équipé d'un bord, et nous montrons que celui-ci s'écrase sur le modèle relationnel standard et le modèle hypercohérent standard. L'opération d'oubli du temps consiste alors simplement en ne retenir que le dernier coup dans chaque partie terminée. Ce résultat est établie pour MALLP. Nous discuterons sa généralisation à LL*pol* au chapitre 7.

Mis à part les décalages, les constructions des jeux polarisés pour MALLP coïncident exactement avec les constructions obtenues par déploiement d'hypercohérences au chapitre 3. En particulier l'ensemble des coups finaux d'un jeu polarisé interprétant une formule obéit aux même règles de formations que la trame d'une hypercohérence : si le connecteur principal de la formule est multiplicatif c'est le produit des ensembles de coups finaux des sous-formules et si le connecteur est additif, s'en est la somme. La proposition suivante nous permet de modifier l'interprétation des décalages sans changer la structure du modèle de jeu de manière à ce que l'ensemble des coups finaux dans un décalage soit l'ensemble des coups finaux dans la sous-formule immédiate. Nous perdons alors la symétrie interne du modèle mais nous gagnons en simplicité pour la comparaison avec le modèle relationnel et le modèle hypercohérent.

Proposition 4.57. *Soit $A = (-, A^{\text{O}}, A^{\text{J}}, S)$ un jeu négatif linéaire alors le jeu positif*

$$\underset{2}{\downarrow} A = (+, A^{\text{O}} \cup (\{*'\} \times A^{\text{J}}), A^{\text{J}} \cup \{*\}, \{* \cdot m \cdot a \cdot (*', a) \mid m \cdot a \in S\})$$

est isomorphe au jeu $\downarrow A$.

Désormais c'est cette construction ($\downarrow_2$) et son dual (noté $\uparrow_2$) que l'on retient pour interpréter les décalages.

Définition 4.58 (projections et trame). Si A est un jeu polarisé linéaire alors sa trame $|A|$ est l'ensemble $\{p(s) \mid s \in S\}$ où $p(m \cdot a) = a$ pour $m \in E^*$ et $a \in E$. On appelle $p(s)$ la projection de s sur la trame du jeu A.

On étend partiellement la projection p aux stratégies, en posant $p(x) = \{p(s) \mid s \in x\}$, pour toute stratégie x dans un *par* et $p(\sigma) = \{(p(s\restriction A), p(s\restriction B)) \mid s \in \sigma\}$ pour $\sigma : A \multimap B$.

Proposition 4.59. *On a les égalités suivantes :* $|\top| = \emptyset$, $|\perp| = \{*'\}$, $|A^\perp| = |A|$, $|\downarrow A| = \{*'\} \times |A|$, $|A \,\&\, B| = |A| + |B|$ *et* $|A \parr B| = |A| \times |B|$.

On apporte deux modifications mineures au modèle relationnel et au modèle hypercohérent de LL pour les adapter à nos besoins spécifiques. On pose $[\downarrow A]_{\mathrm{R}} = \{*'\} \times [A]_{\mathrm{R}}$ et $[\downarrow A]_{\mathrm{HC}} = (\{*'\} \times |\,[A]_{\mathrm{HC}}\,|, \{\{*'\} \times u \mid u \in \Gamma([A]_{\mathrm{HC}})\})$. Dans ces deux modèles, l'espace interprétant $\downarrow A$ est alors catégoriquement isomorphe à l'espace interprétant A. On fait la même chose pour le décalage négatif $\uparrow$ avec le même résultat. Enfin on change l'interprétation des contextes de manière à ce que la nouvelle interprétation d'un contexte fait d'une seule formule positive dans MALLP P soit l'interprétation de $P, \perp$ et on ne change pas l'interprétation des autres contextes. À nouveau ce changement correspond à un isomorphisme catégorique dans chacune des deux catégories. On peut alors répercuter ces changements sur l'interprétation des preuves en utilisant les isomorphismes catégoriques appropriés de manière à interpréter les preuves de MALLP. La correction des deux modèles de MALLP que nous obtenons est alors une conséquence de la correction des modèles hypercohérent et relationnel standards de MALL.

Les modèles relationnel et hypercohérent de MALLP que nous obtenons sont des *modèles dégénérés* ([Lau02a]) au sens où les décalages n'y étant pas visibles (pour toute formule négative A, $[\downarrow A]_{\mathrm{R}} \cong [A]_{\mathrm{R}}$ et $[\downarrow A]_{\mathrm{HC}} \cong [A]_{\mathrm{HC}}$) la négation, définie par $\neg A = (\downarrow A)^{\perp}$ pour A formule négative et $\neg P = (\uparrow P)^{\perp}$ pour P formule positive, y est vue comme une opération involutive (pour toute formule A, $[\neg\neg A]_{\mathrm{R}} \cong [A]_{\mathrm{R}}$ et $[\neg\neg A]_{\mathrm{HC}} \cong [A]_{\mathrm{HC}}$).

Rappelons que pour une formule A de MALL on a $[A]_{\mathrm{R}} = |\,[A]_{\mathrm{HC}}\,|$ et que pour une preuve π de MALL on a $[\pi]_{\mathrm{R}} = [\pi]_{\mathrm{HC}}$. Ceci reste vrai dans MALLP, et ce, bien entendu, avec les modifications que nous venons d'adopter. Par la proposition précédente, pour une formule A dans MALLP, $|\,[A]_{\mathrm{JP}}\,| = [A]_{\mathrm{R}} = |\,[A]_{\mathrm{HC}}\,|$.

Nous montrons maintenant que la projection p fait coïncider dans MALLP l'interprétation jeu et l'interprétation relationnelle (et hypercohérente) des preuves.

Proposition 4.60. *Si π est une preuve de* MALLP *sans atomes alors $p([\pi]_{\mathrm{JP}}) = [\pi]_{\mathrm{R}}$. C'est encore vrai dans* MALLP *avec atomes lorsque $|\,[\alpha]_{\mathrm{JP}}\,| = [\alpha]_{\mathrm{R}}$ pour chaque atome α.*

Démonstration. Par induction sur la dernière règle de la preuve π. Par correction des deux modèles nous pouvons supposer π sans coupure ce qui nous évite une règle.

Règle Top L'interprétation de π est l'ensemble vide dans les deux modèles et la projection envoie bien l'ensemble vide sur l'ensemble vide.

Règle Un On a alors $[\pi]_{\mathrm{JP}} = \{*_\perp *_1 *'_1 *'_\perp\}$ et $p([\pi]_{\mathrm{JP}}) = \{(*'_1, *'_\perp)\}$ et cet ensemble est bien la relation de $[\perp]_{\mathrm{R}}$ dans $[1]_{\mathrm{R}}$ par laquelle on interprète π dans le modèle relationnel.

Règle Bot La preuve π est obtenu par application d'une règle $\perp$ à une preuve π' d'un séquent $\vdash \Gamma$. Que ce séquent contienne une formule positive ou non la projection de $[\pi']_{\mathrm{JP}}$ est alors soit un ensemble de $(a_1, \ldots, a_n)$ avec a_i coup final de l'interprétation dans les jeux d'une formule A_i de Γ, soit un ensemble de $(a, *')$ avec a coup final dans un jeu positif interprétant l'unique formule de Γ. Par hypothèse cet ensemble est égal à $[\pi']_{\mathrm{R}}$. Dans le second cas, on a $[\pi']_{\mathrm{JP}} = [\pi]_{\mathrm{JP}}$ et $[\pi']_{\mathrm{R}} = [\pi]_{\mathrm{R}}$ ce qui conclut. Dans le premier cas, $[\pi]_{\mathrm{JP}} = \{(\delta, *) \cdot p \cdot (\delta', *') \mid \delta \cdot p \cdot \delta' \in [\pi']_{\mathrm{JP}}\}$ et $[\pi]_{\mathrm{R}} = \{(\gamma, *') \mid \gamma \in [\pi']_{\mathrm{R}}\}$. Que $\vdash \Gamma$ contienne ou non une formule positive on a alors bien que $p([\pi]_{\mathrm{JP}}) = [\pi]_{\mathrm{R}}$.

Axiome On alors $[\pi]_{\mathrm{JP}} = I_{[A]_{\mathrm{JP}}}$, d'où $p([\pi]_{\mathrm{JP}}) = \{(a, a) \mid a \in |\,[A]_{\mathrm{JP}}\,|\}$, et $[\pi]_{\mathrm{R}} = I_{[A]_{\mathrm{R}}} = \{(a, a) \mid a \in [A]_{\mathrm{R}}\}$. Comme $|\,[A]_{\mathrm{JP}}\,| = [A]_{\mathrm{R}}$ ceci prouve bien l'égalité.

Règle décalage positif La preuve π est obtenue par application d'un décalage positif à l'une des formules N d'un séquent $\vdash \mathcal{N}$ entièrement négatif conclusion d'une preuve π'. On a par définition $[\pi]_{\mathrm{R}} = [\pi']_{\mathrm{R}}$ et $p([\pi']_{\mathrm{JP}}) = p([\pi]_{\mathrm{JP}})$ d'où l'égalité par hypothèse d'induction.

Règle décalage négatif La preuve π est obtenue par décalage négatif de la seule formule positive P conclusion d'une preuve π'. Modulo la suppression d'une formule $\perp$ lorsque la formule P est la seule conclusion de la preuve, on a à nouveau par définition $[\pi]_{\mathrm{R}} = [\pi']_{\mathrm{R}}$ et $p([\pi']_{\mathrm{JP}}) = p([\pi]_{\mathrm{JP}})$ d'où l'égalité.

Règle Plus A délocalisation près, on a $[\pi]_{\mathrm{JP}} = [\pi']_{\mathrm{JP}}$ et $[\pi]_{\mathrm{R}} = [\pi']_{\mathrm{R}}$ où π est obtenue par une règle plus à partir de π'.

Règle Avec La preuve π est obtenue par une règle avec à partir d'une preuve π_1 et d'une preuve π_2. Dans ce cas, modulo délocalisation, $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}} \cup [\pi_2]_{\text{JP}}$ et $[\pi]_{\text{R}} = [\pi_1]_{\text{R}} \cup [\pi_2]_{\text{R}}$ ce qui conclut.

Règle Par Dans ce cas on a directement $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi']_{\text{JP}}$ et $[\pi]_{\text{R}} = [\pi']_{\text{R}}$ où π est obtenue par une règle *par* à partir de π'.

Règle Tenseur La preuve π est obtenu par application d'une règle tenseur à une preuve π_1 d'un séquent $\vdash P, \mathcal{N}$ et à une preuve π_2 d'un séquent $\vdash P', \mathcal{N}'$ Nous faisons la preuve pour le cas où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont non vides dans les autres cas il faut en plus gérer l'ajout et la suppression de $\perp$ dans l'interprétation des contextes. On a alors $[\pi]_{\text{JP}} = [\pi_1]_{\text{JP}} \parr [\pi_2]_{\text{JP}}$. D'après le lemme 4.43, on a

$$[\pi_1]_{\text{JP}} \parr [\pi_2]_{\text{JP}} = \bigcup_{\substack{b^{\text{O}}\gamma^{\text{O}}\cdot m\cdot\gamma^{\text{J}}b^{\text{J}} \in [\pi_1]_{\text{JP}} \\ b'^{\text{O}}\gamma'^{\text{O}}\cdot m'\cdot\gamma'^{\text{J}}b'^{\text{J}} \in [\pi_2]_{\text{JP}}}} (b^{\text{O}}, b'^{\text{O}})(\gamma^{\text{O}}, \gamma'^{\text{O}}) \cdot m \odot_{P^\perp \cup P'^\perp} m' \cdot (\gamma^{\text{J}}, \gamma'^{\text{J}})(b^{\text{J}}, b'^{\text{J}})$$

donc

$$p([\pi]_{\text{JP}}) = \{(b^{\text{J}}, b'^{\text{J}}, \gamma^{\text{J}}, \gamma'^{\text{J}}) \mid (b^{\text{J}}, \gamma^{\text{J}}) \in p([\pi_1]_{\text{R}}) \text{ et } (b'^{\text{J}}, \gamma'^{\text{J}}) \in ([\pi_2]_{\text{R}})\}.$$

Comme $[\pi]_{\text{R}} = \{(b, b', \gamma, \gamma') \mid (a, \gamma) \in [(b, \gamma)]_{\text{R}} \text{ et } (b', \gamma') \in [\pi_2]_{\text{R}}\}$, par hypothèse d'induction, on a bien l'égalité $p([\pi]_{\text{JP}}) = [\pi]_{\text{R}}$.

□

Pour obtenir ce résultat facilement nous avons renoncé à la symétrie interne du modèle de jeu. En fait il est tout à fait possible de définir la projection p directement pour le modèle avec décalages symétriques de manière à avoir le même résultat de projection sur le modèle relationnel tout en conservant la symétrie. Le seul coût de l'opération est qu'il faut alors connaître le type des parties pour en faire la projection.

4.3 Vers un modèle intégrant les exponentielles

Nous montrons maintenant comment un modèle de ILL dans $\mathbf{JNA}$ peut servir à définir un modèle de LL*pol*. Nous formalisons ce résultat dans la proposition 4.68, en fin de section. Dans une première partie, nous introduisons les constructions que nous utiliserons pour interpréter les exponentielles de LL*pol*. Pour cela nous utilisons comme ingrédient principal un modèle de ILL, supposé donné sous la forme d'une structure de catégorie de Seely sur $\mathbf{JNA}$. Le lemme 4.67, peut être considéré comme le point d'articulation de cette section : nous y établissons toutes les égalités nécessaires à la preuve de correction du modèle de LL*pol*. Après l'avoir établi, nous donnons l'interprétation des règles exponentielles et nous faisons la preuve de correction du modèle de LL*pol* proprement dite.

Dans le chapitre 5, nous exhiberons une structure de catégorie de Seely sur $\mathbf{JNA}$ telle que le résultat établi dans cette section, la proposition 4.68, s'applique et définisse ainsi un modèle de LL*pol*.

Proposition 4.61. *L'opération $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui associe à un jeu négatif A le jeu négatif affine $\boldsymbol{\varepsilon}A = (-, A^{\text{O}}, A^{\text{J}}, S_A \cup \{\varepsilon\})$ et à un morphisme $\sigma : A \multimap B$ le morphisme affine $\sigma \cup \{\varepsilon\} : \boldsymbol{\varepsilon}A \multimap \boldsymbol{\varepsilon}B$ est un foncteur de $\mathbf{JN}$ dans $\mathbf{JNA}$. Et la famille $(\mathrm{afflin}_A)_{A \in \mathbf{JN}}$ des morphismes $\mathrm{afflin}_A : \boldsymbol{\varepsilon}A \multimap A$ pris égaux à I_A est une transformation naturelle de $\boldsymbol{\varepsilon}$ en I.*

Proposition 4.62. *L'opération D qui associe à un jeu négatif A le jeu négatif linéaire bien terminé $DA = \uparrow A^\perp$ et qui associe à un morphisme $\sigma : A \multimap B$ le morphisme central*

$$D\sigma = \{*_A *_B \cdot s \cdot *'_B *'_A \mid s \in \sigma\}$$

de type $DB \dot{\multimap} DA$ est un foncteur contravariant de $\mathbf{JN}$ dans $\mathbf{JNLCT}$.

Proposition 4.63 (monoïdalité). *Le foncteur ε commute à la structure monoïdale symétrique close $(\odot, \S)$ de $\mathbf{JN}$ et $\mathbf{JNA}$ et fait correspondre les structures cartésiennes $(\&, \top)$ et $(\&, \S)$ (* a fortiori*, ε est monoïdal symétrique pour les structures monoïdales associées aux produits Cartésiens). Et le foncteur $D : \mathbf{JNA}(\odot, \S) \to \mathbf{JNLCT}(\parr, \perp)$ est monoïdal symétrique.*

La vérification de ces trois propositions est directe (on utilise notamment les isomorphismes de la proposition 4.37).

On note BotUnn le morphisme $\perp \dot{\multimap} D\S$ donné par la monoïdalité de D. C'est en fait un isomorphisme donné par l'égalité $\perp = \uparrow \S^{\perp}$ dont on note la réciproque UnnBot.

On note $\mathrm{PaTn}_{A_1,\ldots,A_n}$ le morphisme $A_1 \parr \ldots \parr A_n \dot{\multimap} D(A_1 \odot \ldots \odot A_n)$ lui aussi donné par la monoïdalité de D. Ce morphisme est aussi un isomorphisme. On note $\mathrm{TnPa}_{A_1,\ldots,A_n}$ sa réciproque. On adopte la convention que, lorsque $n = 0$, $\mathrm{PaTn}_{A_1,\ldots,A_n}$, alors noté PaTn_0, désigne le morphisme BotUnn et $\mathrm{TnPa}_{A_1\ldots,A_n}$, alors noté TnPa_0, désigne le morphisme UnnBot.

Remarque 4.64. Si σ est un morphisme de type $A \multimap B$ alors $D\sigma = \downarrow_B \uparrow_A \sigma$.

Ingrédients. Nous supposons maintenant que la catégorie des jeux négatifs est une *nouvelle* catégorie de Seely (voir [Bie95]).

Autrement dit nous supposons donnés les ingrédients suivants :

- une comonade $(\sharp, \mathrm{dig}, \mathrm{der})$ dans la catégorie des jeux négatifs (où pour chaque objet $A \in \mathbf{JNA}$, $\mathrm{dig}_A : \sharp A \multimap \sharp\sharp A$ et $\mathrm{der}_A : \sharp A \multimap A$)
- telle que l'adjonction $(\dagger, U, \nu, \eta)$ entre $\mathbf{JNA}(\odot, \S)$ et sa co-Kleisli équipée de la structure monoïdale symétrique du produit Cartésien $(\&, \top)$ soit monoïdale.

En particulier, pour tous jeux négatifs affines $A_1 \ldots A_n$ on a un isomorphisme naturelle $\mathrm{AvTn}_{A_1,\ldots,A_n} : \sharp(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n) \cong \sharp A_1 \odot \ldots \odot \sharp A_n$ et sa réciproque $\mathrm{TnAv}_{A_1,\ldots,A_n}$. lorsque $n = 0$, AvTn_0 et TnAv_0 sont les deux composantes de l'isomorphisme $\sharp\S \cong \S$.

Pour tous jeux négatifs affines A et B on a alors :

1. un morphisme affine $\sharp A \multimap \S$, appelé affaiblissement affine et noté aff_A. (Ce morphisme est égale à $\sharp(\S_A) \,⨾\, \mathrm{AvTn}_0$, où $\S_A$ est l'unique morphisme affine de type $A \multimap \S$) ;
2. un morphisme affine $\sharp A \multimap \sharp A \odot \sharp A$, appelée contraction affine et noté cont_A. (Ce morphisme est égale à $\sharp[I_A, I_A] \,⨾\, \mathrm{AvTn}_{A,A}$) ;
3. pour tout morphisme affine f de type $\sharp A \multimap B$, un morphisme affine $f^\dagger$ de type $\sharp A \multimap \sharp B$ et appelée le promu affine de f. (Ce morphisme est égal à $\mathrm{dig}_A \,⨾\, \sharp f$.)

Et nous avons les égalités :

$$f^\dagger \,⨾\, \mathrm{der}_B = f \tag{4.27}$$

$$f^\dagger \,⨾\, \mathrm{aff}_B = \mathrm{aff}_A \tag{4.28}$$

$$f^\dagger \,⨾\, \mathrm{cont}_B = \mathrm{cont}_A \,⨾\, f^\dagger \odot f^\dagger \tag{4.29}$$

$$\mathrm{TnAv}_{B_1,\ldots,B_n} \,⨾\, \mathrm{aff}_{B_1\&\ldots\&B_n} = \mathrm{aff}_{B_1} \odot \ldots \odot \mathrm{aff}_{B_n} \,⨾\, \delta \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{TnAv}_{B_1,\ldots,B_n} \,⨾\, \mathrm{cont}_{B_1\&\ldots\&B_n} = \\ &\qquad \mathrm{cont}_{B_1} \odot \ldots \odot \mathrm{cont}_{B_n} \,⨾\gamma \,⨾\, (\mathrm{TnAv}_{B_1,\ldots,B_n} \odot \mathrm{TnAv}_{B_1,\ldots,B_n})\end{aligned} \tag{4.31}$$

où δ, et γ sont les isomorphismes :

$$\delta : \S_1 \odot \ldots \odot \S_n \cong \S \tag{4.32}$$

$$\gamma : \sharp B_1 \odot \sharp B_1 \odot \ldots \odot \sharp B_n \odot \sharp B_n \cong \sharp B_1 \odot \ldots \odot \sharp B_n \odot \sharp B_1 \odot \ldots \odot \sharp B_n \tag{4.33}$$

donnés avec le produit monoïdal $\odot$.

4.3.1 Interprétation des exponentielles

Le foncteur $\sharp$ s'étend en un foncteur de $\mathbf{JN}$ dans $\mathbf{JNA}$ en posant $\sharp = \sharp\varepsilon$ (sur $\mathbf{JNA}$, ε agit comme le foncteur identité).

Nous montrons que ces ingrédients supplémentaires sont suffisant pour obtenir un modèle de LL*pol* où $[!N]_{\text{JP}} = \downarrow \sharp\, [N]_{\text{JP}}$.

Pour tout jeu négatif A, nous posons $?A^{\perp} = D\sharp A = \uparrow(\sharp A)^{\perp}$ et $!A = (?A^{\perp})^{\perp} = \downarrow \sharp A$. Les jeux $?A$ et $!A$ sont linéaires et bien terminées.

Définition 4.65. Pour tout jeu négatif linéaire A :

on définit un morphisme central $\mathrm{affl}_A : \perp \dot{\multimap} ?A^{\perp}$, appelé *affaiblissement linéaire*, en posant :

$$\mathrm{affl}_A = \mathrm{BotUnn} \,\mathbin{⨟}\, D\,\mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} A}; \tag{4.34}$$

on définit un morphisme central $\mathrm{contl}_A : ?A^{\perp} \parr ?A^{\perp} \dot{\multimap} ?A^{\perp}$, appelé *contraction linéaire*, en posant :

$$\mathrm{contl}_A = \mathrm{PaTn}_{A,A} \,\mathbin{⨟}\, D\,\mathrm{cont}_{\boldsymbol{\varepsilon} A}; \tag{4.35}$$

et on définit une stratégie derl_A de $?A^{\perp} \parr A$, appelée *déréliction linéaire*, en posant :

$$\mathrm{derl}_A = \uparrow(\mathrm{der}_A \,\mathbin{⨟}\, \mathrm{afflin}_A). \tag{4.36}$$

Soient A et B des jeux négatifs linéaires et soit une stratégie σ de $?A^{\perp} \parr B = \uparrow(\sharp A)^{\perp} \parr B$. Alors $\uparrow_{\sharp A}^{-1} \sigma$ est un morphisme de type $\sharp A \multimap B$, $\boldsymbol{\varepsilon} \uparrow_{\sharp A}^{-1} \sigma$ est un morphisme affine de type $\sharp A \multimap \boldsymbol{\varepsilon} B$, $(\boldsymbol{\varepsilon} \uparrow_{\sharp A}^{-1} \sigma)^{\dagger}$ est un morphisme affine de type $\sharp A \multimap \sharp B$ et finalement $D(\boldsymbol{\varepsilon} \uparrow_{\sharp A}^{-1} \sigma)^{\dagger}$ est un morphisme central de type $?B^{\perp} \multimap ?A^{\perp}$.

Définition 4.66 (Promu linéaire). Si σ est un morphisme d'un jeu linéaire A dans un jeu linéaire B alors le *promu linéaire* de σ est le morphisme central $\sigma^{\dagger_l} : ?B^{\perp} \dot{\multimap} ?A^{\perp}$ égal à :

$$\sigma^{\dagger_l} = D(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{\sharp A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger}. \tag{4.37}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $A_1, \ldots, A_n$ des jeux négatifs linéaires. On a alors que $\mathrm{TnAv}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n}$ est un isomorphisme entre $\sharp\boldsymbol{\varepsilon} A_1 \odot \ldots \odot \sharp\boldsymbol{\varepsilon} A_n = \sharp A_1 \odot \ldots \sharp A_n$ et $\sharp(\boldsymbol{\varepsilon} A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \boldsymbol{\varepsilon} A_n = \odot\sharp(A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n)$ de réciproque $\mathrm{AvTn}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n}$. Donc $D\,\mathrm{TnAv}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n}$ est un isomorphisme de $D\sharp(A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n)$ dans $D(\sharp A_1 \odot \ldots \odot \sharp A_n)$ de réciproque $D\,\mathrm{AvTn}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n}$. Par ailleurs, $\mathrm{TnPa}_{\sharp A_1,\ldots,\sharp A_n}$ est un isomorphisme de $D(\sharp A_1 \odot \ldots \odot \sharp A_n)$ dans $D\sharp A_1 \parr \ldots \parr D\sharp A_n$ de réciproque $\mathrm{PaTn}_{\sharp A_1,\ldots,\sharp A_n}$.

Pour tous jeux linéaires $A_1, \ldots, A_n$, on a donc un isomorphisme

$$\mathrm{PlPa}_{A_1,\ldots A_n} = D\,\mathrm{TnAv}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n} \,\mathbin{⨟}\, \mathrm{TnPa}_{\sharp A_1,\ldots,\sharp A_n} \tag{4.38}$$

de $D\sharp(A_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} A_n)$ dans $D\sharp A_1 \parr \ldots \parr D\sharp A_n$ de réciproque

$$\mathrm{PaPl}_{A_1,\ldots A_n} = \mathrm{PaTn}_{\sharp A_1,\ldots,\sharp A_n} \,\mathbin{⨟}\, D\,\mathrm{AvTn}_{\boldsymbol{\varepsilon} A_1,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon} A_n}\,. \tag{4.39}$$

en particulier, lorsque $n = 0$, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{PlPa}_0 = D\,\mathrm{TnAv}_0 \,\mathbin{⨟}\, \mathrm{TnPa}_0 \tag{4.38bis}$$

de $D\sharp\top$ dans $\perp$, de réciproque

$$\mathrm{PaPl}_0 = \mathrm{PaTn}_0 \,\mathbin{⨟}\, D\,\mathrm{AvTn}_0\,. \tag{4.39bis}$$

Lemme 4.67 (Coupures exponentielles). *Soient A, B, $A_1, \ldots, A_n$ des jeux négatifs linéaires et soit σ une stratégie de $?A^\perp \parr B$. On a les égalités suivantes :*

$$[\![\mathrm{derl}_B \fatsemi \sigma^{\dagger_l}]\!]_{?B^\perp} = \sigma \tag{4.40}$$

$$\mathrm{affl}_B \fatsemi \sigma^{\dagger_l} = \mathrm{affl}_A \tag{4.41}$$

$$\mathrm{contl}_B \fatsemi \sigma^{\dagger_l} = \sigma^{\dagger_l} \parr \sigma^{\dagger_l} \fatsemi \mathrm{contl}_A\,. \tag{4.42}$$

$$\mathrm{affl}_{A_1\&\ldots\&A_n} \fatsemi \mathrm{PlPa}_{A_1,\ldots,A_n} = \alpha \fatsemi \mathrm{affl}_{A_1} \parr \ldots \parr \mathrm{affl}_{A_n} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{contl}_{A_1\&\ldots\&A_n} \fatsemi \mathrm{PlPa}_{A_1,\ldots,A_n} &= \\ (\mathrm{PlPa}_{A_1,\ldots,A_n} \parr \mathrm{PlPa}_{A_1,\ldots,A_n}) \fatsemi \beta \fatsemi \mathrm{contl}_{A_1} &\parr \ldots \parr \mathrm{contl}_{A_n}\end{aligned} \tag{4.44}$$

où α et β sont les isomorphismes

$$\alpha : \perp \cong \perp_1 \parr \ldots \parr \perp_n \tag{4.45}$$

$$\beta : D\sharp A_1 \parr \ldots \parr D\sharp A_n \parr D\sharp A_1 \parr \ldots \parr D\sharp A_n \cong D\sharp A_1 \parr D\sharp A_1 \parr \ldots \parr D\sharp A_n \parr D\sharp A_n \tag{4.46}$$

données par la monoïdalité symétrique du par.

Démonstration. Sous les hypothèses du lemme, on a $\boldsymbol{\varepsilon} \uparrow_A^{-1} \sigma : \sharp A \twoheadrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} B$. Par l'égalité (4.27), on a

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \uparrow_A^{-1} \sigma)^\dagger \fatsemi \mathrm{der}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} = \boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma$$

d'où

$$\begin{aligned}[\![\uparrow(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger \fatsemi (\mathrm{der}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi \mathrm{afflin}_B)]\!]_{\sharp B} &= \uparrow(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma \fatsemi \mathrm{afflin}_B) \\ &= \uparrow \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma \\ &= \sigma.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}[\![\uparrow(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger \fatsemi (\mathrm{der}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi \mathrm{afflin}_B)]\!]_{\sharp B} &= [\![\uparrow(\mathrm{der}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi \mathrm{afflin}_B) \fatsemi \underset{B}{\downarrow} \uparrow(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger]\!]_{D\sharp B} \\ &= [\![\uparrow(\mathrm{der}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi \mathrm{afflin}_B) \fatsemi D(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger]\!]_{D\sharp B}.\end{aligned}$$

D'où l'égalité (4.40).

Par l'égalité (4.28), on a

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger \fatsemi \mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} = \mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} A}$$

d'où

$$D\,\mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi D(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger = D\,\mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} A}$$

et finalement

$$\mathrm{BotUnn} \fatsemi D\,\mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} B} \fatsemi D(\boldsymbol{\varepsilon} \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^\dagger = \mathrm{BotUnn} \fatsemi D\,\mathrm{aff}_{\boldsymbol{\varepsilon} A}$$

ce qui prouve l'égalité (4.41).

Par l'égalité (4.29), on a

$$(\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} \fatsemi \mathrm{cont}_{\varepsilon B} = \mathrm{cont}_{\varepsilon A} \fatsemi ((\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} \odot (\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger})$$

d'où

$$\mathrm{PaTn}_{\sharp B,\sharp B} \fatsemi D\,\mathrm{cont}_{\varepsilon B} \fatsemi D(\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} = \mathrm{PaTn}_{\sharp B,\sharp B} \fatsemi D((\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} \odot (\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger}) \fatsemi D\,\mathrm{cont}_{\varepsilon A}$$

et par monoïdalité de D :

$$\mathrm{PaTn}_{\sharp B,\sharp B} \fatsemi D\,\mathrm{cont}_{\varepsilon B} \fatsemi D(\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} = (D(\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger} \parr D(\varepsilon \overset{-1}{\underset{A}{\uparrow}} \sigma)^{\dagger}) \fatsemi \mathrm{PaTn}_{\sharp A,\sharp A} \fatsemi D\,\mathrm{cont}_{\varepsilon A}$$

ce qui prouve l'égalité (4.42).

Soient A_1,…, A_n des jeux négatifs linéaires et soient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A_1, \ldots, A_n, \\ \varepsilon\mathcal{A} &= \varepsilon A_1, \ldots, \varepsilon A_n, \\ \&\, \varepsilon\mathcal{A} &= \varepsilon A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \varepsilon A_n \\ &= \varepsilon(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n), \\ \text{et} \quad D\sharp\mathcal{A} &= D\sharp A_1, \ldots, D\sharp A_n. \end{aligned}$$

Par l'égalité (4.30), on a :

$$\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \fatsemi \mathrm{aff}_{\&\varepsilon\mathcal{A}} = (\mathrm{aff}_{\varepsilon A_1} \odot \ldots \odot \mathrm{aff}_{\varepsilon A_n}) \fatsemi \delta$$

où δ est l'isomorphisme (4.32). D'où

$$\begin{aligned} &\mathrm{BotUnn} \fatsemi D\,\mathrm{aff}_{\&\varepsilon\mathcal{A}} \fatsemi D\,\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \fatsemi \mathrm{PaTn}_{\sharp\mathcal{A}} = \\ &\qquad \mathrm{BotUnn} \fatsemi D\delta \fatsemi D(\mathrm{aff}_{\varepsilon A_1} \odot \ldots \odot \mathrm{aff}_{\varepsilon A_n}) \fatsemi \mathrm{PaTn}_{\sharp\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Ainsi, par l'égalité (4.38) et par monoïdalité de D :

$$\mathrm{affl}_{\&\mathcal{A}} \fatsemi \mathrm{PlPa}_{\mathcal{A}} = \alpha \fatsemi (\mathrm{BotUnn} \parr \ldots \parr \mathrm{BotUnn}) \fatsemi (\mathrm{affl}_{\varepsilon A_1}) \parr \ldots \parr (D\,\mathrm{aff}_{\varepsilon A_n})$$

où

$$\alpha = \mathrm{BotUnn} \fatsemi D\delta \fatsemi \mathrm{TnPa}_{D\wr,\ldots,D\wr} \fatsemi (\mathrm{UnnBot} \parr \ldots \parr \mathrm{UnnBot})$$

est l'isomorphisme (4.45). Ceci prouve l'égalité (4.43).

Par l'égalité (4.31), on a :

$$\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \fatsemi \mathrm{cont}_{\&\varepsilon\mathcal{A}} = (\mathrm{cont}_{\varepsilon A_1} \odot \ldots \odot \mathrm{cont}_{\varepsilon A_n}) \fatsemi \gamma \fatsemi (\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \odot \mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}})$$

où γ est l'isomorphisme (4.33) pour $B_i = \varepsilon A_i$. D'où

$$D\,\mathrm{cont}_{\&\varepsilon\mathcal{A}} \fatsemi D\,\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} = D(\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \odot \mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}}) \fatsemi D\gamma \fatsemi D(\mathrm{cont}_{\varepsilon A_1} \odot \ldots \odot \mathrm{cont}_{\varepsilon A_n})$$

et, par les égalités (4.38) et (4.35),

$$\begin{aligned} &\mathrm{contl}_{\&\mathcal{A}} \fatsemi \mathrm{PlPa}_{\mathcal{A}} = \\ &\mathrm{PaTn}_{\sharp\&\mathcal{A},\sharp\&\mathcal{A}} \fatsemi D(\mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}} \odot \mathrm{TnAv}_{\varepsilon\mathcal{A}}) \fatsemi D\gamma \fatsemi D(\mathrm{cont}_{\varepsilon A_1} \odot \ldots \odot \mathrm{cont}_{\varepsilon A_n}) \fatsemi \mathrm{TnPa}_{\sharp\mathcal{A}} \end{aligned}$$

et finalement par monoïdalité de D :

$$\begin{aligned}&\mathrm{contl}_{\&\mathcal{A}} \mathbin{;} \mathrm{PlPa}_{\mathcal{A}} = \\ &(\mathrm{PlPa}_{\mathcal{A}} \parr \mathrm{PlPa}_{\mathcal{A}}) \mathbin{;} (\mathrm{PaTn}_{\sharp\mathcal{A}} \parr \mathrm{PaTn}_{\sharp\mathcal{A}}) \mathbin{;} \beta \mathbin{;} \mathrm{contl}_{A_1} \parr \ldots \parr \mathrm{contl}_{A_n})\end{aligned}$$

où

$$\beta = \mathrm{PaTn}_{\sharp\mathcal{A},\sharp\mathcal{A}} \mathbin{;} D\gamma \mathbin{;} \mathrm{TnPa}_{\sharp A_1 \odot \sharp A_1, \ldots, \sharp A_n \odot \sharp A_n}$$

est l'isomorphisme (4.46). Ceci prouve l'égalité (4.44), ce qui achève la preuve du lemme. □

Nous étendons maintenant notre modèle de jeu de MALLP en un modèle de LL*pol* en donnant aux règles déréliction, contraction, affaiblissement et promotion l'interprétation suivante.

Déréliction l'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi'}{\vdash N^\perp, \mathcal{N}}}{\vdash ?N^\perp, \mathcal{N}}\ (\mathit{der.})$$

est $[\![\mathrm{derl}_N \mathbin{;} [\pi']_{\mathrm{JP}}]\!]_N$ si $\mathcal{N}$ est non vide et $G_\perp([\![\mathrm{derl}_N \mathbin{;} [\pi']_{\mathrm{JP}}]\!]_N)$ sinon.

Contraction L'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi'}{\vdash ?P, ?P, \Gamma}}{\vdash ?P, \Gamma}\ (\mathit{cont.})$$

est $[\![[\pi']_{\mathrm{JP}} \mathbin{;} \mathrm{contl}_{P^\perp}]\!]_{?P \parr ?P}$.

Affaiblissement L'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi'}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, ?P}\ (\mathit{aff.})$$

est $[\![F_\perp([\pi']_{\mathrm{JP}}) \mathbin{;} \mathrm{affl}_{P^\perp}]\!]_\perp$.

Promotion L'interprétation de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi'}{\vdash ?P_1, \ldots, ?P_n, N}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}\ (\mathit{prom.})$$

est

$$([\![[\pi']_{\mathrm{JP}} \mathbin{;} \mathrm{PaPl}_{P_1{}^\perp, \ldots, P_n{}^\perp}]\!]_{?P_1 \parr \ldots \parr ?P_n})^{\dagger_\iota} \mathbin{;} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp, \ldots, P_n{}^\perp}$$

si $n > 0$ et $([\![[F_\perp(\pi')]_{\mathrm{JP}} \mathbin{;} \mathrm{PaPl}_0]\!]_\perp)^{\dagger_\iota} \mathbin{;} \mathrm{PlPa}_0$ sinon.

Nous montrons la correction de ce modèle en étendant la preuve de correction du modèle de MALLP aux cas de coupures exponentielles.

Coupure promotion-déréliction. Si π est la preuve

$$\dfrac{(\mathit{der.})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash N^\perp, \mathcal{N}}}{\vdash ?N^\perp, \mathcal{N}} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}\,(\mathit{prom.})}{\vdash \mathcal{N}, ?P_1, \ldots, ?P_n}\ (\mathit{cut})$$

son interprétation est

$$\begin{aligned}
[\pi]_{\text{JP}} &= [\![[\![\mathrm{derl}_N \mathbin{⨾} [\pi_1]_{\text{JP}}]\!]_N \mathbin{⨾} (\sigma^{\dagger_l} \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_{D\sharp N} \\
&\overset{\text{ass.}}{=} [\![[\![[\![\mathrm{derl}_N \mathbin{⨾} \sigma^{\dagger_l}]\!]_{D\sharp N} \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{D\sharp(P_1{}^\perp\&\ldots\&P_n{}^\perp)} \mathbin{⨾} [\pi_1]_{\text{JP}}]\!]_N \\
&\overset{4.40}{=} [\![[\![\sigma \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{D\sharp(P_1{}^\perp\&\ldots\&P_n{}^\perp)} \mathbin{⨾} [\pi_1]_{\text{JP}}]\!]_N \\
&= [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \mathbin{⨾} [\pi_2]_{\text{JP}}]\!]_N
\end{aligned}$$

où, $\sigma = [\![[\pi_2]_{\text{JP}} \mathbin{⨾} \mathrm{PaPl}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{?P_1 \parr \ldots \parr ?P_n}$, si $n > 0$ et $\sigma = [\![F_\perp([\pi_2]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} \mathrm{PaPl}_0]\!]_\perp$, sinon. Donc $[\pi]_{\text{JP}}$ est bien égal à l'interprétation de la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash N^\perp, \mathcal{N}} \qquad \dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash \mathcal{N}, ?P_1, \ldots, ?P_n.}\,(\textit{cut})$$

Coupure promotion-affaiblissement. Si π est la preuve

$$\dfrac{(\textit{aff.})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, ?N^\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}\,(\textit{prom.})}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_n}\,(\textit{cut})$$

son interprétation est :

$$\begin{aligned}
[\pi]_{\text{JP}} &= [\![[\![F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} \mathrm{affl}_N]\!]_\perp \mathbin{⨾} (\sigma^{\dagger_l} \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_{D\sharp N} \\
&\overset{\text{ass.}}{=} [\![F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} (\mathrm{affl}_N \mathbin{⨾} \sigma^{\dagger_l} \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_\perp \\
&\overset{(4.41)}{=} [\![F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} (\mathrm{affl}_{P_1{}^\perp\&\ldots\&P_n{}^\perp} \mathbin{⨾} \mathrm{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_\perp \\
&\overset{(4.43)}{=} [\![F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} (\alpha \mathbin{⨾} \mathrm{affl}_{P_1{}^\perp} \parr \ldots \parr \mathrm{affl}_{P_n{}^\perp})]\!]_\perp
\end{aligned}$$

où, $\sigma = [\![[\pi_2]_{\text{JP}} \mathbin{⨾} \mathrm{PaPl}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{?P_1 \parr \ldots \parr ?P_n}$, si $n > 0$ et $\sigma = [\![F_\perp([\pi_2]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} \mathrm{PaPl}_0]\!]_\perp$, sinon et où α est l'isomorphisme (4.45). Finalement, par monoïdalité du *par* et par la proposition 4.47 :

$$[\pi]_{\text{JP}} = [\![F_\perp([\![\ldots F_\perp([\![F_\perp([\pi_1]_{\text{JP}}) \mathbin{⨾} \mathrm{affl}_{P_1{}^\perp}]\!]_\perp) \ldots \mathbin{⨾} \mathrm{affl}_{P_{n-1}{}^\perp}]\!]_\perp) \mathbin{⨾} \mathrm{affl}_{P_n{}^\perp}]\!]_\perp$$

qui est bien égal à l'interprétation de la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash \Gamma}}{\vdash \Gamma, ?P_1}\,(\textit{aff.})}{\vdots}}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_{n-1}}\,(\textit{aff.})}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_{n-1}, ?P_n.}\,(\textit{aff.})$$

Coupure promotion-contraction. Si π est la preuve :

$$\dfrac{(\textit{cont.})\,\dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_1}{\vdash ?N^\perp, ?N^\perp, \Gamma}}{\vdash \Gamma, ?N^\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\, \pi_2}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}\,(\textit{prom.})}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_n}\,(\textit{cut})$$

son interprétation est

$$
\begin{aligned}
[\pi]_{\text{JP}} =& [\![[\![[\pi_1]_{\text{JP}} \,⨾\, \text{contl}_N]\!]_{D\sharp N \parr D\sharp N} \,⨾\, (\sigma^{\dagger_l} \,⨾\, \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_{D\sharp N} \\
\overset{\text{ass.}}{=}& [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \,⨾\, (\text{contl}_N \,⨾\, \sigma^{\dagger_l} \,⨾\, \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_{D\sharp N} \\
\overset{(4.42)}{=}& [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \,⨾\, ((\sigma^{\dagger_l} \parr \sigma^{\dagger_l}) \,⨾\, \text{contl}_{P_1{}^\perp \& \ldots \& P_n{}^\perp} \,⨾\, \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp})]\!]_{D\sharp N} \\
\overset{(4.44)}{=}& [\![[\pi_1]_{\text{JP}} \,⨾\, \\
& ((\sigma^{\dagger_l} \parr \sigma^{\dagger_l}) \,⨾\, (\text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp} \parr \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}) \,⨾\, \beta \,⨾\, (\text{contl}_{P_1{}^\perp} \parr \ldots \parr \text{contl}_{P_n{}^\perp})) \\
&]\!]_{D\sharp N}
\end{aligned}
$$

où, $\sigma = [\![[\pi_2]_{\text{JP}} \,⨾\, \text{PaPl}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{?P_1 \parr \ldots \parr ?P_n}$, si $n > 0$ et $\sigma = [\![F_\perp([\pi_2]_{\text{JP}}) \,⨾\, \text{PaPl}_0]\!]_\perp$, sinon et où β est l'isomorphisme (4.46), avec $A_i = P_i{}^\perp$.

Par monoïdalité du *par* et par la proposition 4.47 on a finalement que l'interprétation de π est égale à

$$
\begin{aligned}
[\pi]_{\text{JP}} = [\![\\
& \ddots \\
& [\![[\![[\![[pi_1]_{\text{JP}} \,⨾\, \sigma_l^{\dagger_l} \,⨾\, \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{D\sharp N_l} \,⨾\, \sigma_r^{\dagger_l} \,⨾\, \text{PlPa}_{P_1{}^\perp,\ldots,P_n{}^\perp}]\!]_{D\sharp N_r} \,⨾\, \\
& \quad \text{contl}_{P_1{}^\perp}]\!]_{(D\sharp P_1{}^\perp) \parr (D\sharp P_1{}^\perp)} \,⨾\, \\
& \qquad \ddots \\
& \qquad\quad \text{contl}_{P_n{}^\perp}]\!]_{(D\sharp P_n{}^\perp) \parr (D\sharp P_n{}^\perp)}
\end{aligned}
$$

c'est à dire à l'interprétation de la preuve :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_1}{\vdash ?N^\perp, ?N^\perp, \Gamma} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_{(2,l)}}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}(\textit{prom.})}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_n}(\textit{cut}) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\,\pi_{(2,r)}}{\vdash N, ?P_1, \ldots, ?P_n}}{\vdash !N, ?P_1, \ldots, ?P_n}(\textit{prom.})}{\vdash \Gamma, ?P_1, ?P_1, ?P_2, ?P_2 \ldots, ?P_n, ?P_n}(\textit{cut})}{\vdash \Gamma, ?P_1, ?P_2, ?P_2 \ldots, ?P_n, ?P_n}(\textit{cont.})}{\dfrac{\vdots}{\vdash \Gamma, ?P_1, \ldots, ?P_n}(\textit{cont.})}(\textit{cont.})
$$

Ceci achève de prouver la correction du modèle. En conséquent nous pouvons désormais utiliser le résultat suivant :

Proposition 4.68. *Si pour une comonade* $(\sharp, \text{dig}, \text{der})$ *la catégorie des jeux négatifs (équipée du produit de comonoïde* $\odot$*) est une nouvelle catégorie de Seely alors nous avons un modèle de* LLpol.

CHAPITRE 5

Exponentielle pour les jeux à bords

Dans ce chapitre nous munissons les jeux à bords d'une construction exponentielle, pour laquelle la catégorie $\mathbf{JNA}$ des jeux négatifs affines est une nouvelle catégorie de Seely. On a ainsi à la fois un modèle de ILL dans $\mathbf{JNA}$ et un modèle de LL*pol* dans les jeux polarisés linéaires et bien terminés.

Au chapitre 3 (proposition 3.53), nous avons obtenu, par déploiement du *bien sûr* des hypercohérences, une construction sur les arbres qui suggère une autre définition des exponentielles dans les jeux à bord que celle que nous décrivons ici. Cette autre définition serait une version pour les jeux à bords de l'exponentielle à la Lamarche ([Lam92]) qui est aussi l'exponentielle utilisée par P.-L. Curien pour décrire les algorithmes séquentiels en sémantique des jeux ([Cur93]). Malheureusement, nous verrons que l'adaptation d'une telle exponentielle aux jeux à bords se passe mal.

Hors considération des bords, l'exponentielle que nous présentons ici n'a, à notre connaissance, jamais été décrite dans la littérature sur la sémantique des jeux. Cette exponentielle est une sorte d'objet intermédiaire entre l'exponentielle à la Lamarche et la version uniforme de l'exponentielle à la Abramsky-Jagadeesan-Malacaria (AJM) ou à la Hyland-Ong (HO). Il s'agit essentiellement d'une exponentielle avec répétitions mais qui ne permet pas de distinguer deux copies d'une même partie (distinction que les indices de copies de AJM, ou les pointeurs de HO permettent de faire).

En termes informatiques, l'exponentielle à la Lamarche correspond à la notion de partage des données en mémoire tandis que l'exponentielle AJM ou HO correspond à un gestion totalement non partagée de la mémoire, dans laquelle on fait autant de copies différentes d'une donnée que nécessaire, comme s'il s'agissait de plusieurs données différentes. Notre exponentielle intermédiaire correspondrait à une mémoire gérant la multiplicité des copies mais sans introduire de différences entre plusieurs copies d'une même donnée.[1]

Nous interprétons les formules de ILL

$$A := \top \mid 1 \mid \alpha \mid A \,\&\, A \mid A \otimes A \mid A \multimap A \mid {!A}$$

dans la catégorie $\mathbf{JNA}$ des jeux négatifs affines en posant $[\top]_{\text{JNA}} = \int$, $[1]_{\text{JNA}} = \int$, $[A \,\&\, B]_{\text{JNA}} = [A]_{\text{JNA}} \,\&\, [B]_{\text{JNA}}$, $[A \otimes B]_{\text{JNA}} = [A]_{\text{JNA}} \odot [B]_{\text{JNA}}$, et $[A \multimap B]_{\text{JNA}} = [A]_{\text{JNA}} \rightarrowtriangle [B]_{\text{JNA}}$ pour le fragment multiplicatif additif et en posant $[!A]_{\text{JNA}} = \sharp_1 \, [A]_{\text{JNA}}$, où $\sharp_1$ est une nouvelle construction définie plus loin.

[1]Notre intuition informatique sur cette exponentielle est qu'elle pourrait correspondre au mécanisme de *ramassage des miettes* (*garbage collecting*) par comptage des références utilisé dans certains langages objets.

5.1 Construction exponentielle

Pour un mot $s = a_1 \ldots a_n$ sur un alphabet A et un élément i de $\mathbb{N}$ nous définissons la délocalisation de s en i, $s \times \{i\}$, comme étant le mot $(a_1, i) \ldots (a_n, i)$. Avec pour convention que pour $B \subseteq A$, si $s{\restriction}B = p$, alors $s \times \{i\}{\restriction}B = p$ et $s \times \{i\}{\restriction}B \times \{i\} = p \times \{i\}$. L'élément i de $\mathbb{N}$ utilisé dans cette opération de délocalisation est usuellement appelé un *indice de copie* dans le cadre des sémantiques de jeux à la AJM.

Si $p = a_1 \ldots a_n$ est une partie dans le jeu A alors $\mathrm{plg}(p)$ est le mot $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ où $\sigma_i = a_1 \ldots a_i$. Si p est une partie terminée de A il est clair que $\mathrm{plg}(p)$ est une partie terminée de $\sharp_a A$. Et ainsi si p n'est pas terminée alors $\mathrm{plg}(p)$ est tout de même une partie (non terminée) de $\sharp_a A$.

L'opération binaire $\odot$ sur les mots se généralise par commutativité et associativité en une opération n-aire et nous écrivons $\bigodot\{p_1, \ldots, p_n\}$ pour $p_1 \odot \cdots \odot p_n$ ce produit valant le mot vide pour $n = 0$. Cette opération n'est pas défini lorsque les p_i sont des mots sur des alphabets non disjoints, en particulier, lorsque les p_i sont des mots sur un même alphabet. Nous étendons alors cette définition en posant dans ce cas

$$\bigodot[p_1, \ldots, p_n] = \left(\bigodot\{p_1 \times \{1\}, \ldots, p_n \times \{n\}\}\right){\restriction}A \tag{5.1}$$

où $[p_1, \ldots, p_n] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}((A \cdot A)^*)$, autrement dit A est cet alphabet commun à tous les p_i. Cette extension est bien définie puisqu'elle ne dépend pas du choix de l'énumération des éléments du multi-ensemble $[p_1, \ldots, p_n]$.

Définition 5.1 (Exponenentielle sur les objets).
Si A est un jeu négatif alors $\sharp_1 A$ est le jeu négatif affine $(-, P^{\mathrm{O}}(A), P^{\mathrm{J}}(A), S_{\sharp_1 A})$ où

$$S_{\sharp_1 A} = \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(S_A) \\ \mathrm{supp}(\mu) \in \mathrm{St}_{\mathrm{fin}}(A)}} \bigodot[\mathrm{plg}(s) \mid s \in \mu].$$

Une partie dans $\sharp_1 A$ est un mot de mots. Pour éviter les confusions nous notons (p) entre parenthèses pour un mot vu comme lettre d'un mot de mot. Ainsi $(a)(ab)(c)$ est un mot de trois lettres sur l'alphabet $\{(a), (ab), (c)\} \subset \{a, b, c\}^*$.

Lemme 5.2. *Si $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{fin}(S_A \setminus \{\varepsilon\})$ sont tels que $\mathrm{supp}(\mu_1), \mathrm{supp}(\mu_2) \in \mathrm{St}(A)$ alors*

$$\bigodot \mathrm{plg}(\mu_1) \cap \bigodot \mathrm{plg}(\mu_2) \neq \emptyset \implies \mu_1 = \mu_2.$$

Démonstration. Pour un multi-ensemble fini μ d'éléments de $S_A \setminus \{\varepsilon\}$ dont le support est une stratégie sur A et pour une partie $\rho = (p_1) \ldots (p_{2k}) \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu)$ on pose $O(\mu) = [p_j \mid 1 \leq j \leq 2k]$. On a alors que

$$O([s_1, \ldots, s_n]) = \sum_{i=1}^{n} O([s_i]) \tag{5.2}$$

(clairement $O(\mu + [s]) = O(\mu) + O([s])$), ce qui montrer bien que $O(\mu)$ est uniquement déterminé.

Sous les hypothèses du lemme on a alors que $O(\mu_1) = O(\mu_2)$. On montre par récurrence sur la cardinalité n de μ_1 que si $O(\mu_1) = O(\mu_2)$ alors $\mu_1 = \mu_2$. Pour $n = 0$, $\mu_1 = []$ et $O(\mu_1) = []$ donc $O(\mu_2) = []$, par (5.2), c'est que pour chaque élément s de μ_2, $O([s]) = []$, ce qui ne peut arriver que pour $s = \varepsilon$ qui n'est pas un élément de μ_2, et donc $\mu_2 = \mu_1 = []$. Supposons maintenant la propriété vraie jusqu'à n et supposons que μ_1 est de cardinalité $n + 1$. Alors μ_1 est non vide donc $O(\mu_1)$ est non vide et il existe un élément maximal (pour l'ordre préfixe) $p \neq \varepsilon$ de $O(\mu_1) = O(\mu_2)$ (non nécessairement unique). Par (5.2), il existe un élément s de μ_1 et un élément s' de μ_2 tels que (p) apparaît dans $\mathrm{plg}(s)$ et dans $\mathrm{plg}(s')$. Mais comme p a été choisi maximal c'est qu'il apparaît comme dernier élément de $\mathrm{plg}(s)$ et aussi comme dernier élément de $\mathrm{plg}(s')$. On en déduit que $p = s = s'$, par définition de plg. Donc $O(\mu_1) = O(\mu_1 - [s]) + O([s])$ et $O(\mu_2) = O(\mu_2 - [s]) + O([s])$ d'où $O(\mu_1 - [s]) = O(\mu_2 - [s])$. Par l'hypothèse de récurrence on obtient que $\mu_1 - [s] = \mu_2 - [s]$ de quoi on conclut que $\mu_1 = \mu_2$, ce qui achève la preuve. □

on généralise l'opération plg de la manière suivante. Si A est un alphabet et si $B_1, \ldots, B_n$ sont des sous-alphabets de A deux à deux disjoints, on définit un opération $\mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}$ sur A^* en posant :

$$\begin{aligned} \mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}(s \cdot a) &= \mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}(s) \cdot (s{\upharpoonright}B_i \cdot a) \quad \text{si } a \in B_i \\ \mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}(s \cdot a) &= \mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}(s) \cdot a \quad \text{sinon} \\ \mathrm{plg}_{B_1,\ldots,B_n}(\varepsilon) &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.3}$$

En particulier, si $s \in A^*$, alors on a $\mathrm{plg}_A(s) = \mathrm{plg}(A)$.

De même qu'on a généralisé l'opération $\odot$ en $\bigodot$ on généralise l'opération $\odot_B$ en une opération $\bigodot_B$.

On décrit plus précisément l'action de $\bigodot_B$ sur des parties terminées d'un jeu $A \multimap B$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(S_{A\multimap B})$ et soit un énumération $s_1, \ldots, s_n$ des éléments de μ, c'est à dire un suite $(s_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $\mu = [s_1, \ldots, s_n]$. On note $A_i \multimap B_i$ la délocalisation du jeu $A \multimap B$ en un $i \in \{1, \ldots, n\}$. Le mot $s_i \times \{i\}$ est alors une partie terminée du jeu $A_i \multimap B_i$ dont la projection sur $A \multimap B$ est s.

Soit $C = \cup_{1\leq i\leq n} B_i$. Par commutativité et associativité de $\odot_C$, l'ensemble

$$P = s_1 \times \{1\} \odot_C s_2 \times \{2\} \odot_C \ldots \odot_C s_n \times \{n\}$$

est uniquement déterminé. L'ensemble $P{\upharpoonright}(A, B)$ est alors indépendant de l'énumération choisie pour les éléments de μ. Ainsi μ détermine de manière unique l'ensemble $P{\upharpoonright}(A, B)$. L'opération $\bigodot_B$ est alors celle qui à μ associe $P{\upharpoonright}(A, B)$ avec pour convention que $\bigodot_B[] = \varepsilon$ et $\bigodot_B[s] = s$.

Remarque 5.3. Si $[\varepsilon], \mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(S_{A\multimap B})$ alors $\bigodot_B \mathrm{plg}(\mu + [\varepsilon]) = \bigodot_B \mathrm{plg}(\mu)$.

Définition 5.4. Pour chaque stratégie f de $A \multimap B$ on pose

$$\sharp_1 f = \bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mathrm{supp}(\mu){\upharpoonright}A\in\mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 B} [\mathrm{plg}_{A,B}(s) \mid s \in \mu].$$

Remarques 5.5. L'opération $\sharp_1$ sur les morphismes est croissante pour l'inclusion *i.e.*

$$f \subseteq g \implies \sharp_1 f \subseteq \sharp_1 g.$$

Par la remarque 5.3, on a aussi que $\sharp_1 f = \sharp_1 f \setminus \{\varepsilon\}$.

Les multi-ensembles μ utilisés dans la construction de $\sharp_1 f$ vérifient par hypothèse que $\mathrm{supp}(\mu)$ est une stratégie dans le jeu $A \multimap B$ et que $\mathrm{supp}(\mu){\upharpoonright}A$ est une stratégie dans le jeu A. On peut donc appliquer la proposition 4.29 pour en déduire que $\mathrm{supp}(\mu){\upharpoonright}B$ est une stratégie dans le jeu B.

Les projections de $\bigodot_{\sharp_1 B}[\mathrm{plg}_{A,B}(s) \mid s \in \mu]$ sur $\sharp_1 A$ et sur $\sharp_1 B$ sont respectivement incluses dans $\bigodot[\mathrm{plg}(s{\upharpoonright}A) \mid s \in \mu]$ et $\bigodot[\mathrm{plg}(s{\upharpoonright}B) \mid s \in \mu]$. Ce sont donc des ensembles de parties terminées de $\sharp_1 A$ et $\sharp_1 B$.

Par définition, les éléments de $\sharp_1 f$ sont des mots de $(P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$, ils vérifient donc la condition de basculement joueur dans la flèche linéaire négative $\sharp_1 A \multimap \sharp_1 B$ (ces mots sont reconnus par l'automate de la figure 4.2). On en conclut que $\sharp_1 f$ est un ensemble de partie terminés de $\sharp_1 A \multimap \sharp_1 B$. De plus ε est un élément de $\bigodot_{\sharp_1 B}[]$ donc quelque soit f, ε est un élément de $\sharp_1 f$.

Nous allons montrer que la construction $\sharp_1$ est un foncteur de la catégorie des jeux négatifs. Pour cela nous avons besoin d'établir un certain nombre de lemmes.

Un mot $t \in \sharp_1 f$ est fait de blocs d'occurrences consécutives de lettres $\sigma_{2i+1} \cdot \rho \cdot \sigma_{2i+2}$ avec $\sigma_{2i+1} \in P^{\mathrm{O}}(B)$, $\sigma_{2i+2} \in P^{\mathrm{J}}(B)$ et $\rho \in (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^*$. De plus, ces blocs vérifient que deux occurrences consécutives de lettres $\rho_k \rho_{k+1}$ dans ρ sont telles qu'il existe un $a \in A^{\mathrm{O}} \cup A^{\mathrm{J}}$ pour lequel $\rho_{k+1} = \rho_k \cdot a$ et aussi qu'il existe un $b \in B^{\mathrm{J}}$ tel que $\sigma_{2i+2} = \sigma_{2i+1} \cdot b$.

Lemme 5.6. *Soit z un sous-ensemble déterministe de $P(A \rightarrowtriangle B)$ telle que $s\upharpoonright A$ soit aussi un sous-ensemble déterministe de $P(A)$.*

1. *Pour toute paire w, w' d'éléments de ∇z, si $w\upharpoonright B = w'\upharpoonright B$ alors $w \preceq w'$ ou $w' \preceq w$.*
2. *Pour toute paire $w \cdot b^{\mathrm{J}}$, $w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$ d'éléments de ∇z avec $b^{\mathrm{J}}, b'^{\mathrm{J}} \in B^{\mathrm{J}}$, si $w\upharpoonright B = w'\upharpoonright B$ alors $w \cdot b^{\mathrm{J}} = w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$.*

Démonstration. On montre le premier point. Soit un mot w'', et deux coups, c_1 et c_2 tels que $w'' \cdot c_1 \preceq w$ et $w'' \cdot c_2 \preceq w'$. Si $w'' \in P^{\mathrm{O}}(A \rightarrowtriangle B)$ alors par déterminisme de z on a $c_1 = c_2$. Supposons maintenant que $w'' \in P^{\mathrm{J}}(A \rightarrowtriangle B)$. Par la condition de basculement joueur dans la flèche linéaire c'est soit que $c_1, c_2 \in A^{\mathrm{J}}$ soit que $c_1, c_2 \in B^{\mathrm{O}}$. Dans le premier cas comme $w'' \cdot c_1\upharpoonright A$ et $w'' \cdot c_2\upharpoonright A$ sont des parties joueur dans $\nabla(z\upharpoonright A)$ et que $z\upharpoonright A$ est déterministe, c_1 et c_2 sont égaux. Dans le second cas comme $w'' \cdot c_1 \preceq w$ et $w'' \cdot c_2 \preceq w'$, par égalité des projections de w et w' sur B, c_1 et c_2 sont aussi égaux. Il y a donc égalité de c_1 et c_2 dans tous les cas. Ainsi tout mot w'' qui est a la fois un préfixe strict de w et un préfixe strict de w' se prolonge en un préfixe commun à w et à w'. On en conclut que $w \preceq w'$ ou $w' \preceq w$.

On peut alors appliquer le premier point à la paire w, w' du second point. On a ainsi $w \preceq w'$ ou $w' \preceq w$. Supposons que $w \preceq w'$. C'est que w est un préfixe strict de $w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$ Par déterminisme de z le coup suivant w dans $w' \cdot b^{\mathrm{J}}$ est forcément b^{J}. Ainsi $w \cdot b^{\mathrm{J}} \preceq w \cdot b'^{\mathrm{J}}$. Nous montrons alors que $w \cdot b^{\mathrm{J}}$ ne peut pas être un préfixe strict de $w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$. Si c'était le cas on aurait $w' = w \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot m$ pour un certain mot m non vide. Par projection sur B on aurait $(w'\upharpoonright B) \cdot b'^{\mathrm{J}} = (w\upharpoonright B) \cdot b^{\mathrm{J}} \cdot (m\upharpoonright B)$ et comme $w\upharpoonright B = w'\upharpoonright B$ on obtiendrait $b'^{\mathrm{J}} = b^{\mathrm{J}} \cdot (m\upharpoonright B)$. Ce qui donnerait $(m\upharpoonright B) = \varepsilon$ et comme b'^{J} doit être la dernière lettre de m ceci est impossible. Donc $w \cdot b^{\mathrm{J}} = w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$. Réciproquement en supposant que $w' \preceq w$ on aboutit encore à l'égalité $w \cdot b^{\mathrm{J}} = w' \cdot b'^{\mathrm{J}}$, ce qui conclut pour le second point. ☐

Lemme 5.7. *Soit f une stratégie sur un jeu négatif $A \rightarrowtriangle B$. Si μ_1 et μ_2 sont deux multi-ensembles d'éléments de f ne contenant pas le mot vide et tels que* $\mathrm{supp}(\mu_1\upharpoonright A), \mathrm{supp}(\mu_2\upharpoonright A) \in \mathrm{St}(A)$ *alors*

$$\bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1) \cap \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_2) \neq \emptyset \implies \mu_1 = \mu_2.$$

Démonstration. Soit t un élément de $\bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1) \cap \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_2)$. On a alors

$$t\upharpoonright \sharp_1 B \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu_1\upharpoonright B) \cap \bigodot \mathrm{plg}(\mu_2\upharpoonright B).$$

Donc, par le lemme 5.2, $\mu_1\upharpoonright B = \mu_2\upharpoonright B$.

Par ailleurs, l'ensemble des éléments de t qui sont des éléments de $P(A)$ est un ensemble déterministe qui contient tous les éléments de $\mu_1\upharpoonright A$ et tous les éléments de $\mu_2\upharpoonright A$. De plus, $\mathrm{supp}(\mu_1 + \mu_2)$ est une stratégie sur $A \rightarrowtriangle B$. On peut donc appliquer le second point du lemme 5.6 à $z = \mathrm{supp}(\mu_1 + \mu_2)$. On en déduit en particulier que si $s \in \mu_1$ et $s' \in \mu_2$ sont tels que $s\upharpoonright B = s'\upharpoonright B$ alors $s = s'$. Donc finalement $\mu_1 = \mu_2$. ☐

Une partie terminée t dans $\sharp_1 f$ est un mot $F_1 \cdot \ldots \cdot F_n$ où les F_i sont des éléments de $P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$. Le lemme 5.8 établit un critère fort de comparaison de ces mots F_i.

Lemme 5.8 (égalité des blocs). *Si deux éléments $(m_1) \cdot l \cdot (m_2)$ et $(m'_1) \cdot l' \cdot (m'_2)$ de $P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$ sont facteurs d'un même éléments t de $\bigodot_{\sharp_1 B}[\mathrm{plg}_{A,B}(s) \mid s \in \mu]$ alors*

$$m_1 = m'_1 \text{ ou } m_2 = m'_2 \implies (m_1) \cdot l \cdot (m_2) = (m'_1) \cdot l' \cdot (m'_2).$$

Démonstration. de tels facteurs de t sont de la forme :

$$(m_1) \cdot l \cdot (m_2) = (q \cdot b^{\mathrm{O}})(p \cdot a_1^{\mathrm{O}}) \dots (p \cdot a_1^{\mathrm{O}} \dots a_n^{\mathrm{J}})(q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})$$
$$(m_1') \cdot l' \cdot (m_2') = (q' \cdot b'^{\mathrm{O}})(p' \cdot a_1'^{\mathrm{O}}) \dots (p' \cdot a_1'^{\mathrm{O}} \dots a_k'^{\mathrm{J}})(q' \cdot b'^{\mathrm{O}} b'^{\mathrm{J}}).$$

Et il existe deux parties terminées s et s' dans μ et un préfixe $p \cdot b^{\mathrm{J}}$ de s et un préfixe $p' \cdot b'^{\mathrm{J}}$ de s' telles que

$$\mathrm{plg}_{A,B}(p \cdot b^{\mathrm{J}}) = \sigma(m_1) \cdot l \cdot (m_2)$$
$$\mathrm{plg}_{A,B}(p' \cdot b'^{\mathrm{J}}) = \sigma'(m_1') \cdot l' \cdot (m_2').$$

On a alors $p \cdot b^{\mathrm{J}} = m \cdot b^{\mathrm{O}} a_1^{\mathrm{O}} \dots a_n^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{J}}$ et $p' \cdot b'^{\mathrm{J}} = m' \cdot b'^{\mathrm{O}} a_1'^{\mathrm{O}} \dots a_n'^{\mathrm{J}} b'^{\mathrm{J}}$ avec $m\restriction B = q$ et $m'\restriction B = q'$. On a $m_1 = q \cdot b^{\mathrm{O}}$, $m_1' = q' \cdot b'^{\mathrm{O}}$, $m_2 = q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}}$ et $m_2' = q' \cdot b'^{\mathrm{O}} b'^{\mathrm{J}}$. Donc si $m_1 = m_1'$, alors $q \cdot b^{\mathrm{O}} = q' \cdot b'^{\mathrm{O}}$, et, *a fortiori*, si $m_2 = m_2'$. Par le second point du lemme 5.6 on obtient alors que $p \cdot b^{\mathrm{J}} = p' \cdot b'^{\mathrm{J}}$. Et ceci suffit à établir l'égalité des deux facteurs. □

Lemme 5.9. *Soit $z \subseteq_{\mathrm{fin}} f$ tel que $z\restriction A \in \mathrm{St}(A)$. Si t est un élément de $\bigodot[\mathrm{plg}(s_1), \dots, \mathrm{plg}(s_n)]$ où $\mathrm{supp}([s_1, \dots, s_n]) = z\restriction B$ alors il existe un unique mot t' élément de $\sharp_1\, z$ dont la projection sur B est égale à t. De plus le mot t' s'obtient en remplaçant dans t chaque facteur $(q)(q \cdot b^{\mathrm{J}})$ par l'unique mot $(q) \cdot \ldots \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ qui soit facteur d'au moins un des $\mathrm{plg}(s_i)$, pour $i \in \{1 \dots, n\}$.*

Démonstration. Pour chaque i tel que $1 \leq i \leq n$, il existe un élément s_i' de z tel que $s_i'\restriction B = s_i$. Cet élément est unique (dans z). En effet, si s_i' et s_i'' sont deux éléments de z tels que $s_i'\restriction B = s_i''\restriction B$ alors le second point du lemme 5.6 s'applique et ainsi $s_i' = s_i''$. On obtient ainsi un multi-ensemble $\mu = [s_1', \dots, s_n']$ d'éléments de z.

Le mot t est obtenu par projection sur $\sharp_1\, B$ d'un mot

$$m \in \mathrm{plg}(s_1) \odot_{(\sharp_1 B) \times \{1,\dots,n\}} \cdots \odot_{(\sharp_1 B) \times \{1,\dots,n\}} \mathrm{plg}(s_n).$$

On forme alors un mot

$$m' \in \mathrm{plg}_{A,B}(s_1') \odot_{(\sharp_1 B) \times \{1,\dots,n\}} \cdots \odot_{(\sharp_1 B) \times \{1,\dots,n\}} \mathrm{plg}_{A,B}(s_n')$$

en remplaçant chaque facteur $((q), i)((q \cdot b^{\mathrm{J}}), i)$ de m par l'unique facteur $((q), i) \cdot \rho \times \{i\} \cdot ((q \cdot b^{\mathrm{J}}), i)$ de s_i'. Le mot m' est alors tel que $m'\restriction(\sharp_1\, B \times \{1, \dots, n\}) = m'$. Autrement dit la projection sur $\sharp_1\, B$ du mot $t' = m'\restriction(\sharp_1\, A \multimap \sharp_1\, B)$ est le mot t. Par construction, t' est un élément de

$$\bigodot_{\sharp_1 B}[\mathrm{plg}_{A,B}(s_1'), \dots, \mathrm{plg}_{A,B}(s_n')].$$

C'est donc un élément de $\sharp_1\, z$.

L'unicité d'un tel t' est une conséquence directe du lemme 5.8. En effet, s'il y avait un autre élément t'' satisfaisant les même propriétés que t', il y aurait un facteur $F' = (q) \cdot \rho' \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ de t' et un facteur $F'' = (q) \cdot \rho'' \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ de t'', tout deux différents. Mais ce mot F'' serait facteur d'un $\mathrm{plg}_{A,B}(s')$ pour $s' \in \mu$, ce serait donc aussi un facteur de t', d'où, par le lemme 5.8, la contradiction $F' = F''$.

Par construction de m', t' s'obtient en remplaçant dans t chaque facteur $(q)(q \cdot b^{\mathrm{J}})$ par un mot $(q) \cdot \ldots \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ facteur d'un des $\mathrm{plg}(s_i)$. Mais d'après le second point du lemme 5.6, si $(q) \cdot \rho \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ est en facteur dans l'un des $\mathrm{plg}(s_i)$ et si $(q) \cdot \rho' \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})$ est lui aussi en facteur dans l'un des $\mathrm{plg}(s_i)$ alors ces deux facteurs sont égaux. Ceci conclut. □

Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(S_A)$ tel que $\mathrm{supp}(\mu) \in \mathrm{St}_{\mathrm{fin}}(A)$ et soit $t \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu)$. Si $t' \cdot (p) \preceq t$ alors $p \preceq s$ pour un certain $s \in \mu$. Ainsi étant donné l'occurrence d'un coup (p) dans t, on sait trouver un élément s de μ tel que (p) soit une occurrence de $\mathrm{plg}(s)$. Nous voudrions obtenir un équivalent de cette propriété pour la construction $\sharp_1$ sur les morphismes. Le problème est alors le suivant. Étant donnés une stratégie f de $A \multimap B$ et un élément t de $\sharp_1\, f$, pour chaque occurrence de coup (p) dans t nous voulons pouvoir reconstruire à partir de t un élément de $s \in \triangledown f$ tel que (p) soit le dernier élément de $\mathrm{plg}_{A,B}(s)$. nous introduisons à cet effet une opération fil pour laquelle on aura que si $t' \cdot (p) \prec t$ alors $\mathrm{fil}(t' \cdot (p))$ est cet élément s de $\triangledown f$ recherché.

On définit une opération fil sur les éléments de $\triangledown \sharp_1 f$ en posant :

$$\mathrm{fil}(w \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})) = \mathrm{fil}(w) \cdot b^{\mathrm{J}} \tag{5.4}$$
$$\mathrm{fil}(w \cdot (p \cdot a^{\mathrm{J}})) = \mathrm{fil}(w) \cdot a^{\mathrm{J}} \tag{5.5}$$
$$\mathrm{fil}(w \cdot (p \cdot a^{\mathrm{O}})) = \mathrm{fil}(w) \cdot a^{\mathrm{O}} \tag{5.6}$$
$$\mathrm{fil}(w \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}}) \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}})) = \mathrm{fil}(w \cdot (q \cdot b^{\mathrm{J}})) \cdot b^{\mathrm{O}} \tag{5.7}$$
$$\mathrm{fil}(w \cdot (b^{\mathrm{O}})) = b^{\mathrm{O}} \tag{5.8}$$
$$\mathrm{fil}(\varepsilon) = \varepsilon \tag{5.9}$$

La définition de cette opération est ambiguë. En effet, il peut exister plusieurs occurrences de $(q \cdot b^{\mathrm{J}})$ antérieures à un coup $(q \cdot b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}})$. La clause (5.8) est donc mal définie. Mais le lemme 5.8 garantit que cet ambiguïté n'a pas d'incidence sur le résultat. En effet, on montre par récurrence sur la longueur de q que si $w \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})$ et $w' \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})$ sont deux préfixes d'un élément t de $\sharp_1 f$ alors $\mathrm{fil}(w \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})) = \mathrm{fil}(w' \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}}))$. Par le lemme 5.8, on a $w = w_1 \cdot m$ et $w' = w_2 \cdot m$ avec $m = (q \cdot b^{\mathrm{O}})(p \cdot a_1^{\mathrm{O}}) \ldots (p \cdot a_1^{\mathrm{O}} \ldots a_{2n}^{\mathrm{J}})$ pour un certain w_1 et un certain w_2. Si la longueur de q est 0 on a alors directement l'égalité puisque, dans ce cas, $\mathrm{fil}(w_1 \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})) = b^{\mathrm{O}} a_1 \ldots a_{2n} b^{\mathrm{J}}$ et $\mathrm{fil}(w_2 \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})) = b^{\mathrm{O}} a_1 \ldots a_{2n} b^{\mathrm{J}}$, par la clause (5.7). Sinon on a d'une part $\mathrm{fil}(w_1 \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})) = \mathrm{fil}(w_1 \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}})) \cdot a_1 \ldots a_{2n} b^{\mathrm{J}}$ et d'autre part $\mathrm{fil}(w_2 \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}})) = \mathrm{fil}(w_2 \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}})) \cdot a_1 \ldots a_{2n} b^{\mathrm{J}}$, par application des trois premières clauses. Mais $\mathrm{fil}(w_1 \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}})) = \mathrm{fil}(w_3 \cdot (q)) \cdot b^{\mathrm{O}}$ pour un certain w_3 tel que $w_3 \cdot (q) \preceq w_1$ et $\mathrm{fil}(w_2 \cdot (q \cdot b^{\mathrm{O}})) = \mathrm{fil}(w_4 \cdot (q)) \cdot b^{\mathrm{O}}$ pour un certain w_4 tel que $w_4 \cdot (q) \preceq w_2$, par application de la clause (5.8). Et $q = q' \cdot b'^{\mathrm{J}}$ pour un certain $b'^{\mathrm{J}} \in B^{\mathrm{J}}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux deux préfixes de t $w_3 \cdot (q' \cdot b'^{\mathrm{J}})$ et $w_4 \cdot (q' \cdot b'^{\mathrm{J}})$ on a alors l'égalité recherchée.

Lemme 5.10. *Pour chaque $t \in \bigodot_{\sharp_1 B}[\mathrm{plg}_{A,B}(s) \mid s \in \mu]$, on a $\{\mathrm{fil}(t') \mid t' \preceq t\} = \triangledown \operatorname{supp}(\mu)$.*

Démonstration. Soit $[s_1, \ldots, s_n] = \mu$. Considérons l'élément m de

$$(\mathrm{plg}_{A,B}(s_1) \times \{1\}) \odot_{\sharp_1 B \times \mathbb{N}} \ldots \odot_{\sharp_1 B \times \mathbb{N}} (\mathrm{plg}_{A,B}(s_n) \times \{n\})$$

dont t est issu. Chaque préfixe t' de t provient alors d'un préfixe m' de m, *i.e.* $m' \upharpoonright (\sharp_1 A, \sharp_1 B) = t'$. En posant $\mathrm{fil}(m') = \mathrm{fil}(m' \upharpoonright (\sharp_1 A, \sharp_1 B))$, on peut alors considérer l'action de fil sur les préfixes de m. Les coups d'un même facteur de la forme $P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$ de t portent tous le même indice de copie dans m'. Ainsi lors d'une étape $\mathrm{fil}(m' \cdot ((q \cdot b^{\mathrm{O}} b^{\mathrm{J}}), i)$ on se ramène à une étape $\mathrm{fil}(m'' \cdot ((q \cdot b^{\mathrm{O}}), i))$. Et lors d'une étape avec aléa $\mathrm{fil}(m' \cdot ((q \cdot b^{\mathrm{J}} b^{\mathrm{O}}), i)$ on peut toujours faire le choix de se ramener à une étape $\mathrm{fil}(m'' \cdot ((q \cdot b^{\mathrm{J}}), i))$. Ainsi fil peut être définie de manière équivalente et sans aléa sur les préfixes de m en posant :

$$\mathrm{fil}(m' \cdot ((r \cdot c), i) \cdot w \cdot ((r \cdot cd), i)) = \mathrm{fil}(m' \cdot ((r \cdot c), i)) \cdot d$$
$$\mathrm{fil}(\varepsilon) = \varepsilon$$

Autrement dit dans le calcul de $\mathrm{fil}(t')$ on peut toujours suivre les coups provenant d'un même indice de copie. Il est alors facile de voir que, par construction, le mot $\mathrm{fil}(t')$ est le préfixe d'un certain $s \in \mu$ donc un élément de $\triangledown \operatorname{supp}(\mu)$. Réciproquement tous les $s \in \mu$ sont utilisés dans t, donc chaque préfixe d'un des $s \in \mu$ est atteint par un certain $\mathrm{fil}(t')$. □

Proposition 5.11. *L'opération $\sharp_1$ est un foncteur dans la catégorie des jeux négatifs affines.*

Démonstration. On commence par montrer que $\sharp_1 f$ est bien un morphisme affine de $\sharp_1 A$ dans $\sharp_1 B$. Il reste à montrer que $\sharp_1 f$ est déterministe. Pour cela considérons deux éléments t_1 et t_2 de $\sharp_1 f$ et un préfixe commun $t \cdot (p \cdot c)$ à ces deux éléments, de longueur impaire. On montre alors que $t \cdot (p \cdot c)$ se prolonge en un préfixe commun à t_1 et t_2 de longueur paire. On aura ainsi montré que le plus grand préfixe commun de deux éléments quelconques de $\natural_1 f$ est de longueur paire. Comme $t \cdot (p \cdot c)$ est de longueur impaire $p \cdot c$ est un élément de $P^{\mathrm{J}}(A)$ ou de $P^{\mathrm{O}}(B)$. Dans les deux cas $(p \cdot c)$ ne peut pas être le dernier coup d'un facteur de la forme $P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$. Il existe donc un mot $m_1 \cdot (q_1) \in (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$ qui prolonge $t \cdot (p \cdot c)$ dans t_1 et un mot $m_2 \cdot (q_2) \in (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B)$ qui prolonge $t \cdot (p \cdot c)$ dans t_2. On a alors des mots w, w_1 et w_2 tels que $\mathrm{fil}(t \cdot (p) \cdot m_1 \cdot (q_1)) = w \cdot c \cdot w_1$ et $\mathrm{fil}(t \cdot (p) \cdot m_2 \cdot (q_2)) = w \cdot c \cdot w_2$. Par déterminisme de f le premier élément de w_1 et le premier élément de w_2 sont alors égaux, de quoi l'on déduit que le premier coup de m_1 et le premier coup de de m_2 sont aussi égaux, ce qui conclut.

L'égalité $\natural_1 I_A = I_{\natural_1 A}$ est immédiate par construction.

Il reste à montrer la commutation de l'opération *dos* à la composition. Soient deux stratégies $f : A \multimap B$ et $g : B \multimap C$.

Montrons que $\natural_1 f \fatsemi \natural_1 g \subseteq \natural_1(f \fatsemi g)$. Soit un témoin $t = \llbracket t_1 \fatsemi t_2 \rrbracket$ de la composition de $\natural_1 f$ et $\natural_1 g$. On doit montrer que $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C) \in \natural_1(f \fatsemi g)$. Si ce témoin t est le mot vide c'est terminé puisque $\varepsilon \in \natural_1(f \fatsemi g)$. On suppose donc que $t \neq \varepsilon$. Soit un multi-ensemble (éventuellement vide) $\mu_1 \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(f \setminus \{\varepsilon\})$ tel que $t_1 \in \bigodot_{\natural_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1)$ et soit un multi-ensemble non vide $[s'_1, \dots, s'_n, s'_{n+1}, \dots s'_{n'}] \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(g \setminus \{\varepsilon\})$ tel que $t_2 \in \bigodot_{\natural_1 C} \mathrm{plg}_{A,C}([s'_1, \dots, s'_n])$, si $1 \leq i \leq n$, alors $s'_i\upharpoonright B \neq \varepsilon$ et si $n+1 \leq i \leq n'$, alors $s'_i\upharpoonright B = \varepsilon$.

On a $t_1\upharpoonright \natural_1 B \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu_1\upharpoonright B)$ et $t_2\upharpoonright \natural_1 B \in \bigodot \mathrm{plg}([s'_1, \dots, s'_n]\upharpoonright B)$. Et, comme $t_1\upharpoonright \natural_1 B = t_2\upharpoonright \natural_1 B$, par le lemme 5.2, on en déduit que $\mu_1\upharpoonright B = [s'_1, \dots, s'_n]\upharpoonright B$ et les deux multi-ensembles μ_1 et $[s'_1, \dots, s'_n]$ ont la même cardinalité n. Donc, pour chaque élément $q \in \mathrm{supp}(\mu_1\upharpoonright B)$, il existe un élément $s_q \in \mathrm{supp}(\mu_1)$ tel que $s_q\upharpoonright B = q$. En utilisant le lemme 5.6 appliqué aux éléments s de $\mathrm{supp}(\mu_1)$ tels que $s\upharpoonright B = q$ on obtient l'unicité de s_q. Ainsi, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq n$, il existe un unique élément $s_i \in \mu_1$ tel que $s\upharpoonright B = s'_i\upharpoonright B$. On en déduit que μ_1 est un multi-ensemble $[s_1, \dots, s_n]$ où, pour chaque i tel que $1 \leq i \leq n$, $s_i\upharpoonright B = s'_i\upharpoonright B$.

Pour $n+1 \leq i \leq n'$ on pose $s_i = \varepsilon$. On a alors,

$$t_1 \in \bigodot_{\natural_a B} \mathrm{plg}_{A,B}([s_1, \dots, s_{n'}]).$$

Soit le multi-ensemble :

$$\mu_3 = [\llbracket s_1 \fatsemi s'_1 \rrbracket_B, \dots, \llbracket s_{n'} \fatsemi s'_{n'} \rrbracket_B]. \tag{5.10}$$

Puisque $\varepsilon \in f$, $\mu_3 \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(f \fatsemi g)$. De plus $\mathrm{supp}(\mu_3)\upharpoonright A = \mathrm{supp}(\mu_1)\upharpoonright A \cup \{\varepsilon\}$ donc $\mathrm{supp}(\mu_3)\upharpoonright A$ est une stratégie de A. Enfin $\mu_3\upharpoonright C = \mu_2\upharpoonright C$. Comme

$$t\upharpoonright \natural_1 C \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu_2\upharpoonright C),$$

par le lemme 5.9 on obtient qu'il existe un élément t_3 de $\bigodot_{\natural_1 C} \mathrm{plg}_{A,C}(\mu_3)$ tel que $t_3\upharpoonright \natural_1 C = t\upharpoonright \natural_1 C$. Ce mot t_3 est alors un élément de $\natural_1(f \fatsemi g)$ et pour conclure cette partie de la preuve il ne reste plus qu'à prouver que $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C) = t_3$.

Si $t\upharpoonright(\natural_1 C) = \varepsilon$ alors $t = \varepsilon$ et $t_3 = \varepsilon$ ce qui conclut. On suppose donc dans la suite que $t\upharpoonright(\natural_1 C) \neq \varepsilon$.

Supposons que $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C) \neq t_3$. Soit t_4 le plus grand préfixe commun de t_3 et de $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C)$ appartenant à $(P^{\mathrm{O}}(C) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(C))^*$. Comme t_3 et $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C)$ sont des éléments de $(P^{\mathrm{O}}(C) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(C))^*$ et, comme $t\upharpoonright(\natural_1 C) = t_3\upharpoonright(\natural_1 C)$, il existe un élément $r \cdot c^{\mathrm{O}}$ de $P^{\mathrm{O}}(C)$ tel que $t_4 \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}})$ est un préfixe commun à t_3 et à $t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C)$. Il existe aussi un élément $c^{\mathrm{J}} \in C^{\mathrm{J}}$ tel que $t_4\upharpoonright(\natural_1 C) \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}})(r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$. On a alors un mot $m \in (P(A) \cup P(B))^*$ et un mot $m' \in (P(A))^*$ telles que

$$t_4 \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m' \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}}) \preceq t_3$$
$$t_5 \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}}) \preceq t$$

où t_5 est tel que $t_5\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C) = t_4$.

Il suffit alors de montrer que $m' = m\upharpoonright(\natural_1 A)$ pour conclure par contradiction avec la maximalité de t_4, à l'égalité $t_3 = t\upharpoonright(\natural_1 A, \natural_1 C)$.

Par construction, il existe un indice $i \in \{1, \dots, n'\}$ tel que $(r \cdot c^{\mathrm{O}})(r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$ est un facteur de $\mathrm{plg}(s'_i{\restriction}C)$.

Le mot $\mathrm{plg}_{A,C}([\![s_i \ ;\ s'_i]\!]_B)$ possède un unique facteur $(r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m''' \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$, avec $m''' \in (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^*$. Comme $(r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m''' \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$ est un facteur de t_3 (par construction de t_3) on en déduit, par le lemme 5.8, que $m' = m'''$.

De même, le mot $\mathrm{plg}_{B,C}(s'_i)$ possède un unique facteur $(r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m'' \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$, avec $m'' \in (P^{\mathrm{O}}(B) \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$. De plus, on a soit $m'' = \varepsilon$ soit

$$m'' = (q \cdot b_1^{\mathrm{O}}) \dots (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2l}^{\mathrm{J}}),$$

pour un certain $q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2l} \in P^{\mathrm{J}}(B)$. Par ailleurs, comme $(r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot m'' \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$ est par construction un facteur de $t_2 = t{\restriction}(\sharp_1 B, \sharp_1 C)$, on en déduit, par le lemme 5.8, que $m{\restriction}(\sharp_1 B) = m''$.

On a clairement $[\![\mathrm{plg}_{A,B}(s_i) \ ;\ \mathrm{plg}_{B,C}(s'_i)]\!] = \mathrm{plg}_{A,B,C}([\![s_i \ ;\ s'_i]\!])$.

Le mot $[\![\mathrm{plg}_{A,B}(s_i) \ ;\ \mathrm{plg}_{B,C}(s'_i)]\!]$ possède un unique facteur $(r \cdot c^{\mathrm{O}}) \cdot w \cdot (r \cdot c^{\mathrm{O}} c^{\mathrm{J}})$ avec $w \in (P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$. Et par ce qui précède ce facteur est tel que $w{\restriction}(\sharp_1 A) = m''' = m'$ et $w{\restriction}(\sharp_1 B) = m'' = m{\restriction}(\sharp_1 B)$.

Pour montrer que $m = m'{\restriction}(\sharp_1 A)$, il suffit de montrer que $w = m'$.

Supposons que $m = \varepsilon$. Comme $w \in (P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$ et $w{\restriction}(\sharp_1 B) = m{\restriction}(\sharp_1 B)$, c'est que $w = \varepsilon$, ce qui conclut.

Supposons maintenant que $m \neq \varepsilon$. D'après l'automate de la figure 4.4 (appliqué à t), m est un élément de $(P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$. Ainsi $m'' = m{\restriction}B \neq \varepsilon$. On a donc

$$w{\restriction}B = m{\restriction}B = (q \cdot b_1^{\mathrm{O}}) \dots (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2l}^{\mathrm{J}}),$$

pour un certain $q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2l} \in P^{\mathrm{J}}(B)$. Donc il existe une suite de mots $(F_j)_{1 \le j \le l}$ tous facteurs de t_1, avec

$$F_j = (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2j-1}^{\mathrm{O}}) \cdot m_j \cdot (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2j}^{\mathrm{J}})$$

tels que $m = F_1 \cdot \ldots \cdot F_l$. Et il existe une suite de mots $(G_j)_{1 \le j \le l}$ tous facteurs de $\mathrm{plg}_{A,B}(s_i)$, avec

$$G_j = (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2j-1}^{\mathrm{O}}) \cdot w_j \cdot (q \cdot b_1^{\mathrm{O}} \dots b_{2j}^{\mathrm{J}})$$

tels que $w = G_1 \cdot \ldots \cdot G_l$. Mais ces mots G_j étant des facteurs de $\mathrm{plg}_{A,B}(s_i)$ éléments de $(P^{\mathrm{O}}(B) \cdot (P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^* \cdot P^{\mathrm{J}}(B))^*$ ce sont aussi des facteurs de t_1. On en déduit par le lemme 5.8 que $G_j = F_j$ pour chaque $j \in \{1, \dots, l\}$. Et ceci conclut.

On montre $\sharp_1(f \ ;\ g) \subseteq \sharp_1 f \ ;\ \sharp_1 g$. Soit $t'' \in \sharp_1(f \ ;\ g)$. Alors il existe un $\mu'' = [p_1, \dots, p_n] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}((f \ ;\ g) \setminus \{\varepsilon\})$ tel que $\mathrm{supp}(\mu''){\restriction}A \in \mathrm{St}(A)$ et $t'' \in \bigodot \mathrm{plg}_{A,C}(\mu'')$. Par le lemme 4.33, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe un unique $s_i \in f$ et un unique $s'_i \in g \setminus \{\varepsilon\}$ tels que $[\![s_i \ ;\ s'_i]\!]_B = p_i$. On a alors $\mu = [s_1, \dots, s_n] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f)$, $\mu' = [s'_1, \dots, s'_n] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(g)$, $\mu{\restriction}A = \mu'{\restriction}A$, $\mu{\restriction}B = \mu'{\restriction}B$ et $\mu'{\restriction}C = \mu''{\restriction}C$. Comme $\mathrm{supp}(\mu){\restriction}A \in \mathrm{St}(()A)$, par la proposition 4.29 appliquée à $\mathrm{supp}(\mu){\restriction}A$ et à f, on obtient $\mathrm{supp}(\mu'){\restriction}B = \mathrm{supp}(\mu){\restriction}B \in \mathrm{St}(B)$. Par application du lemme 5.9 à μ' et à $t''{\restriction}\sharp_1 C$, il existe un mot $t' \in \sharp_1 g$ tel que $t' \in \bigodot \mathrm{plg}_{B,C}(\mu')$ et $t'{\restriction}\sharp_1 C = t{\restriction}\sharp_1 C$. Et par application du lemme 5.9 à μ et à $t'{\restriction}\sharp_1 B$, il existe un mot $t \in \sharp_1 f$ tel que $t \in \bigodot \mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$ et $t{\restriction}\sharp_1 B = t'{\restriction}\sharp_1 B$. Il reste alors à montrer que $[\![t \ ;\ t']\!]_{\sharp_1 B} = t''$. Le raisonnement utilisé précédemment pour montrer $[\![t_1 \ ;\ t_2]\!]_{\sharp_1 B} = t_3$ s'applique encore. Ceci conclut. □

5.2 *Non exponentielle* des algorithmes séquentiels

D'après la proposition 3.53, dans le cadre des jeux à bords, la construction *bien sûr* sur les objets qui serait la plus proche du *bien sûr* standard des hypercohérences serait la suivante.

Définition 5.12 (*bien sûr* algorithmes séquentiels). Si A est un jeu négatif alors $\sharp_a A$ est le jeu négatif affine $(-, P^{\mathrm{O}}(A), P^{\mathrm{J}}(A), S_{\sharp_a A})$ où $S_{\sharp_a A}$ est l'ensemble des mots $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{2n}$ de $(P^{\mathrm{O}}(A) \cdot P^{\mathrm{J}}(A))^*$ qui vérifient :

1. $\forall k, \exists j \leq k, \exists a^{\mathrm{O}} \in A^{\mathrm{O}}, \sigma_{2k+1} = \sigma_{2j} \cdot a^{\mathrm{O}}$ où on pose $\sigma_0 = \varepsilon$
2. $\forall k, \exists a^{\mathrm{J}} \in A^{\mathrm{J}}, \sigma_{2k+2} = \sigma_{2k+1} \cdot a^{\mathrm{J}}$
3. $\forall i, \forall j, i \neq j \implies \sigma_i \neq \sigma_j$ (sans répétitions)
4. $\forall i, \exists j \geq i, \sigma_i \preceq \sigma_j$ et $\sigma_j \in S_A$ (terminaison).

En particulier $\varepsilon \in S_{\sharp_a A}$.

Si σ est une partie dans $\sharp_a A$, on note $o(\sigma)$ l'ensemble des coups σ_i de σ qui sont des parties terminées de A.

Remarque 5.13. Si $\sigma \in S_{\sharp_a A}$ alors $o(\sigma)$ est une stratégie finie saturée de A.

Démonstration. Si ce n'était pas le cas il y aurait deux élément de σ de la forme $p \cdot a_1^{\mathrm{J}}$ et $p \cdot a_2^{\mathrm{J}}$. Mais p serait alors un éléments de σ apparaissant deux fois dans σ. Une fois juste avant une occurrence de $p \cdot a_1^{\mathrm{J}}$ et une autre fois juste avant une occurrence de $\sigma \cdot a_2^{\mathrm{J}}$. Comme σ est sans répétition ceci est impossible. Rappelons que la saturation signifie simplement que $o(\sigma)$ est clos par préfixe dans S_A. □

Remarque 5.14. Soit un coup a^{O} de A^{O}. Si σ est une partie terminée de $\sharp_a A$ alors le mot σ dans lequel on efface toutes les occurrences de lettres $\{(p) \mid a^{\mathrm{O}} \preceq p\}$ est encore une partie terminée de $\sharp_a A$.

Nous définissons une opération eff d'effacement des répétitions sur les mots, en posant $\mathrm{eff}(s \cdot a) = \mathrm{eff}(s) \cdot a$ si $a \notin s$, $\mathrm{eff}(s \cdot a) = \mathrm{eff}(s)$ si $a \in s$ et $\mathrm{eff}(\varepsilon) = \varepsilon$. Cette opération préserve l'ordre préfixe.

Le jeu $\sharp_a A$ est en fait l'image du jeu $\sharp_1 A$ par effacement des répétitions dans les parties terminées.

Proposition 5.15. *Pour tout multi-ensemble fini μ dont le support est une stratégie finie sur A, l'ensemble des éléments $\sigma \in S_{\sharp_a A}$ tels que $o(\sigma) = \triangledown\, \mathrm{supp}(\mu) \cap S_A$ est égal à*

$$\mathrm{eff}\left(\bigodot[\mathrm{plg}(s) \mid s \in \mu]\right)$$

On a ainsi $S_{\sharp_a A} = \mathrm{eff}(S_{\sharp_1 A})$.

Nous établissons une remarque utile sur l'effacement des répétitions avant de prouver cette proposition.

Remarque 5.16 *(effacement des répétitions par blocs 1).* L'opération d'effacement des répétitions appliquée à un mots de $\bigodot[\mathrm{plg}(s) \mid s \in \mu]$ efface (uniquement) des paires consécutives d'occurrences de lettres $\sigma_{2i+1}\sigma_{2i+2}$ avec $\sigma_{2i+1} \in P^{\mathrm{O}}(A)$ et $\sigma_{2i+2} \in P^{\mathrm{J}}(A)$.

Démonstration de la remarque. Par construction de telles occurrences consécutives de lettres vérifient que $\sigma_{2i+2} = \sigma_{2i+1} \cdot a^{\mathrm{J}}$ pour un certain $a^{\mathrm{J}} \in A^{\mathrm{J}}$. Supposons que σ_{2i+2} est effacé. C'est qu'il existe une autre occurrence σ_{2j+2} de cette lettre avec $j < i$ et σ_{2j+1} est alors une occurrence de σ_{2i+1} ce qui assure l'effacement de cette dernière occurrence. Supposons maintenant que σ_{2i+1} est effacé. Il existe une autre occurrence σ_{2j+1} antérieure ($j < i$) de cette lettre. On a alors $\sigma_{2i+2} = \sigma_{2i+1} \cdot a_1^{\mathrm{J}}$ et $\sigma_{2j+2} = \sigma_{2i+1} \cdot a_2^{\mathrm{J}}$ pour un certain $a_1^{\mathrm{J}} \in A^{\mathrm{J}}$ et un certain $a_2^{\mathrm{J}} \in A^{\mathrm{J}}$. On utilise alors le fait que $\mathrm{supp}(\mu)$ est une stratégie pour conclure à l'égalité (par déterminisme) de a_1^{J} et a_2^{J}. Ceci assure alors que σ_{2i+2} est une répétition de σ_{2j+2} qui sera ainsi effacée. □

Démonstration de la proposition 5.15. En utilisant la remarque 5.16, on vérifie facilement, que les éléments de eff $(\bigodot[\mathrm{plg}(s) \mid s \in \mu])$ sont des éléments de $S_{\sharp_a A}$.

Soit maintenant $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{2k}$ un élément de $S_{\sharp_a A}$ et soit $x = o(\sigma)$. On se donne une énumération par les entiers $f : \{1, \ldots, n\} \to x$ des éléments de x et on définit le multi-ensemble μ dont le support est x et dans lequel la multiplicité de chaque élément est 1. Pour chaque i tel que $||\sigma|| \leq 2i + 2$

$$\{p \in x \mid \sigma_{2i+1} \preceq p\} = \{p \in x \mid \sigma_{2i+1} \preceq p\}$$

car x est déterministe. Pour chacun de ces i, $\{p \in x \mid \sigma_{2i+1} \preceq p\}$ est un ensemble non vide d'entiers. Nous formons alors un mot

$$h_i = ((\sigma_{2i+1}\sigma_{2i+2}) \times \{j_1\}) \cdot \ldots \cdot ((\sigma_{2i+1}\sigma_{2i+2}) \times \{j_k\})$$

où $j_1, \ldots, j_k$ est une énumération des éléments de $f^{-1}(\{p \in x \mid \sigma_{2i+1} \preceq p\})$, par exemple donnée par l'ordonnancement naturel des entiers. Soit alors le mot $t = h_1 \cdot \ldots \cdot h_k$. Par construction ce mot t est un élément de $\bigodot\{\mathrm{plg}(s) \times f(s) \mid s \in \mu\}$. En effet, sa projection sur un alphabet $(\sharp_a A) \times \{i\}$ est $\mathrm{plg}(s) \times \{i\}$ pour le $s \in \mu$ tel que $f(s) = i$. Ces projections sont entrelacées dans t par blocs de deux lettres. Et t ne contient pas d'autres lettres que celles apparaissant dans ces projections. Enfin $\mathrm{eff}(t{\upharpoonright}(\sharp_a A))$ est égal à σ. En effet il est clair que $t{\upharpoonright}(\sharp_a A)$ est le mot σ dans lequel chaque bloc de deux lettres $\sigma_{2i+1}\sigma_{2i+2}$ est répété consécutivement un nombre non nul de fois, ce nombre étant ramené à un après effacement des répétition. Ce qui conclut. $\square$

La proposition 5.15 suggère de définir la construction $\sharp_a$ sur les morphismes en posant $\sharp_a f = \mathrm{eff}(\sharp_1 f)$. Malheureusement, pour des raisons liées aux bords, ceci ne fait pas pour autant un foncteur de la construction $\sharp_a$. En effet, il existe trois jeux négatifs affines A, B et C et un morphisme affine de A dans B et un morphisme affine de B dans C tels que $\sharp_a f \fatsemi \sharp_a g \neq \sharp_a(f \fatsemi g)$.

Plus précisément, nous avons le contre-exemple suivant. Soient A, B et C trois jeux négatifs affines tels que $a_1^{\mathrm{O}}a_2^{\mathrm{J}}a_3^{\mathrm{O}}a_4^{\mathrm{J}} \in S_A$, $b_1^{\mathrm{O}}b_2^{\mathrm{J}}, b_1^{\mathrm{O}}b_2^{\mathrm{J}}b_3^{\mathrm{O}}b_4^{\mathrm{J}} \in S_B$ et $d_1^{\mathrm{O}}d_2^{\mathrm{J}}, c_1^{\mathrm{O}}c_2^{\mathrm{J}} \in S_C$ avec $d_1^{\mathrm{O}} \neq c_1^{\mathrm{O}}$. Alors

$$f = \{\varepsilon, b_1^{\mathrm{O}}a_1^{\mathrm{O}}a_2^{\mathrm{J}}b_2^{\mathrm{J}}b_3^{\mathrm{O}}a_3^{\mathrm{O}}a_4^{\mathrm{J}}b_4^{\mathrm{J}}\} \quad \text{et}$$
$$g = \{\varepsilon, d_1^{\mathrm{O}}a_1^{\mathrm{O}}a_2^{\mathrm{J}}d_2^{\mathrm{J}}, c_1^{\mathrm{O}}a_1^{\mathrm{O}}a_2^{\mathrm{J}}a_3^{\mathrm{O}}a_4^{\mathrm{J}}c_2^{\mathrm{J}}\}$$

sont des morphismes affines, respectivement de A vers B et de B vers C, et

$$f \fatsemi g = \{\varepsilon, c_1^{\mathrm{O}}a_1^{\mathrm{O}}a_2^{\mathrm{J}}a_3^{\mathrm{O}}a_4^{\mathrm{J}}c_2^{\mathrm{J}}\}.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \\ d_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \\ b_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \\ c_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \in \sharp_1 g,$$

$$\begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \\ d_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \\ b_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \\ c_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \in \sharp_a g,$$

$$\begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \\ a_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{O}} \\ b_2^{\mathrm{J}} \\ b_3^{\mathrm{O}} \\ b_4 \end{pmatrix} \in \sharp_a f,$$

$$\begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \\ d_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \\ a_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \\ c_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \in \sharp_a f \fatsemi \sharp_a g,$$

mais l'ensemble

$$\sharp_a(f \fatsemi g) = \left\{ \varepsilon, \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \\ a_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \\ c_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \right\}$$

ne contient pas le mot $\begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{\mathrm{O}} \\ d_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \\ a_3^{\mathrm{O}} \\ a_4^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{\mathrm{O}} \\ c_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix}$.

5.3 Structure de nouvelle catégorie de Seely

Proposition 5.17 (isomorphismes).

On a les isomorphismes naturels $\sharp_1 \smallint \cong \smallint$ *et* $\sharp_1(A \mathbin{\&} B) \cong \sharp_1 A \odot \sharp_1 B$.

Démonstration. On a $\sharp_1 \smallint = (-, \emptyset, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}) = \smallint$. Si $f = \{\varepsilon\}$ est l'unique morphisme de $\smallint$ dans $\smallint$ on a encore $\sharp_a f = \sharp_1 f = \{\varepsilon\} = I_{\smallint}$ ce qui conclu pour la naturalité de $\sharp_1 \smallint \cong \smallint$.

On suppose A et B disjoints. On a $(\sharp_1(A \mathbin{\&} B))^{\mathrm{O}} = P^{\mathrm{O}}(A \mathbin{\&} B) = P^{\mathrm{O}}(A) \cup P^{\mathrm{O}}(B)$ et $(\sharp_1(A \mathbin{\&} B))^{\mathrm{J}} = P^{\mathrm{J}}(A \mathbin{\&} B) = P^{\mathrm{J}}(A) \cup P^{\mathrm{J}}(B)$. On a aussi $(\sharp_1 A \odot \sharp_1 B)^{\mathrm{O}} = (\sharp_1 A)^{\mathrm{O}} \cup (\sharp_1 B)^{\mathrm{J}} = P^{\mathrm{O}}(A) \cup P^{\mathrm{O}}(B)$ et $(\sharp_1 A \odot \sharp_1 B)^{\mathrm{J}} = (\sharp_1 A)^{\mathrm{J}} \cup (\sharp_1 B)^{\mathrm{J}} = P^{\mathrm{J}}(A) \cup P^{\mathrm{J}}(B)$. On a

$$S_{\sharp_1(A\&B)} = \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_{A\&B}) \\ \operatorname{supp}(\mu) \in \operatorname{St}(A\&B)}} \bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu].$$

Mais $S_{A\&B} = S_A \cup S_B$ donc $\mathcal{M}_{\text{fin}}(S_A) \times \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_B)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{\text{fin}}(S_{A\&B})$ par l'application $(\mu_1, \mu_2) \mapsto \mu_1 + \mu_2$. On a alors

$$\begin{aligned}
S_{\sharp_1(A\&B)} &= \bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_A) \\ \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_B) \\ \operatorname{supp}(\mu_1) \in \operatorname{St}(A) \\ \operatorname{supp}(\mu_2) \in \operatorname{St}(B)}} \left(\bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_1] + [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_2] \right) \\
&= \bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_A) \\ \operatorname{supp}(\mu_1) \in \operatorname{St}(A)}} \bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_B) \\ \operatorname{supp}(\mu_2) \in \operatorname{St}(B)}} \left(\bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_1] + [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_2] \right) \\
&= \bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_A) \\ \operatorname{supp}(\mu_1) \in \operatorname{St}(A)}} \bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_B) \\ \operatorname{supp}(\mu_2) \in \operatorname{St}(B)}} \left(\bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_1] \right) \odot \left(\bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_2] \right) \\
&= \left(\bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_A) \\ \operatorname{supp}(\mu_1) \in \operatorname{St}(A)}} \bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_1] \right) \odot \left(\bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(S_B) \\ \operatorname{supp}(\mu_2) \in \operatorname{St}(B)}} \bigodot [\operatorname{plg}(s) \mid s \in \mu_2] \right) \\
&= S_{(\sharp_1 A) \odot (\sharp_1 B)}
\end{aligned}$$

Donc les deux jeux $\sharp_1(A \mathbin{\&} B)$ et $\sharp_1 A \odot \sharp_1 B$ sont égaux et, *a fortiori*, isomorphes.

La naturalité de cet isomorphisme provient encore d'une égalité. En effet, on a $\operatorname{St}(A) \times \operatorname{St}(A') \cong \operatorname{St}(A \mathbin{\&} A')$. Par ailleurs, pour $f : A \multimap B$ et $f' : A' \multimap B'$ où A, A', B et B' sont deux à deux disjoints, on a $f \mathbin{\&} f' = f \cup f'$ où cette union est disjointe. On a ainsi

$$\begin{aligned}
&\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(f \mathbin{\&} f') \mid \operatorname{supp}(\mu){\restriction}(A \mathbin{\&} A') \in \operatorname{St}(A \mathbin{\&} A')\} \cong \\
&\{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(f) \mid \operatorname{supp}(\mu_1){\restriction}A \in \operatorname{St}(A)\} \times \{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(f') \mid \operatorname{supp}(\mu_2){\restriction}A' \in \operatorname{St}(A')\}
\end{aligned}$$

par l'application $(\mu_1, \mu_2) \mapsto \mu_1 + \mu_2$. L'ensemble $\sharp_1(f \,\&\, f')$ est donc égal à

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mu_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f') \\ \mathrm{supp}(\mu_1)\restriction A \in \mathrm{St}(A) \\ \mathrm{supp}(\mu_2)\restriction A' \in \mathrm{St}(A')}} \bigodot_{\sharp_1(B\& B')} [\mathrm{plg}_{A\&A' \multimap B\&B'}(s) \mid s \in \mu_1 + \mu_2] \\
&= \bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mathrm{supp}(\mu_1)\restriction A \in \mathrm{St}(A)}} \bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f') \\ \mathrm{supp}(\mu_2)\restriction A' \in \mathrm{St}(A')}} \bigodot_{\sharp_1 B \odot \sharp_1 B'} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1) + \mathrm{plg}_{A' \multimap B'}(\mu_2) \\
&= \bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mathrm{supp}(\mu_1)\restriction A \in \mathrm{St}(A)}} \bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f') \\ \mathrm{supp}(\mu_2)\restriction A' \in \mathrm{St}(A')}} \left(\bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1) \right) \odot_{\sharp_1 B \cup \sharp_1 B'} \left(\bigodot_{\sharp_1 B'} \mathrm{plg}(s)_{A' \multimap B'}(\mu_2) \right) \\
&= \left(\bigcup_{\substack{\mu_1 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mathrm{supp}(\mu_1)\restriction A \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_1) \right) \odot_{\sharp_1 B \cup \sharp_1 B'} \left(\bigcup_{\substack{\mu_2 \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f') \\ \mathrm{supp}(\mu_2)\restriction A' \in \mathrm{St}(A')}} \bigodot_{\sharp_1 B'} \mathrm{plg}_{A' \multimap B'}(\mu_2) \right) \\
&= \sharp_1 f \odot \sharp_1 f'.
\end{aligned}$$

Ces égalités deviennent des isomorphismes lorsque les jeux ne sont pas disjoints. □

Définition 5.18 (déréliction). Pour chaque jeu négatif affine A on pose

$$\mathrm{der}_A = \{s \in S_{\sharp_1 A \multimap A} \mid \forall p \preccurlyeq^{\mathrm{J}} s, p\restriction(\sharp_1 A) = \mathrm{plg}(p\restriction A)\}.$$

Remarque 5.19 *(caractérisation).* Pour chaque jeu négatif affine A, si $I_A : A_l \multimap A_r$ est l'identité sur A, avec la convention usuelle sur les délocalisations (remarque 4.26), alors

$$\mathrm{der}_A = \{\mathrm{plg}_{A_l}(s) \mid s \in I_A\}$$

à oubli des indices l et r près. Et par le lemme 4.27 on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{der}_A &= \{\mathrm{plg}_{A_l}(\mathrm{id}(p)) \mid p \in S_A\} && (5.11) \\
&= \left\{ a_1^{\mathrm{O}} \left(a_1^{\mathrm{O}}\right) \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ a_2^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} a_2^{\mathrm{J}} \dots a_{2n-1}^{\mathrm{O}} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ \vdots \\ a_{2n-1}^{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{O}} \\ \vdots \\ a_{2n-1}^{\mathrm{O}} \\ a_{2n}^{\mathrm{J}} \end{pmatrix} a_{2n}^{\mathrm{J}} \mid a_1 \dots a_{2n} \in S_A \right\}. && (5.12)
\end{aligned}$$

Proposition 5.20 (déréliction). *La famille* $\mathrm{der} = (\mathrm{der}_A)_{A \in \mathbf{JNA}}$ *est une transformation naturelle de* $\sharp_1$ *vers* I *dans la catégorie des jeux négatifs affines (où* I *est le foncteur identité).*

Démonstration. On vérifie facilement, à l'aide de la remarque 5.19, que der_A est une stratégie de $\sharp_1 A \multimap A$. De plus, comme A est un jeu affine, der_A contient le mot vide, donc der_A est bien un morphisme affine de $\sharp_1 A$ dans A. Soit maintenant f un morphisme affine de A dans B, il faut montrer que $\sharp_1 f \,\mathring{,}\, \mathrm{der}_B = \mathrm{der}_A \,\mathring{,}\, f$.

$$\begin{tikzcd}
\sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{der}_A"] \arrow[d, "\sharp_1 f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\sharp_1 B \arrow[r, "\mathrm{der}_B"'] & B.
\end{tikzcd}$$

On prouve en fait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{der}_A \,\mathring{,}\, f &= \mathrm{plg}_A(f) \quad \text{et} && (5.13) \\
\sharp_1 f \,\mathring{,}\, \mathrm{der}_B &= \mathrm{plg}_A(f). && (5.14)
\end{aligned}$$

On commence par remarquer que si s est un élément de $S_{A\multimap B}$ alors

$$[\![\mathrm{plg}_{A_l}(\mathrm{id}(s\restriction A)) \fatsemi s]\!]_A = \mathrm{plg}_A(s) \tag{5.15}$$

$$[\![\mathrm{plg}_{A,B}(s) \fatsemi \mathrm{plg}_{B_l}(\mathrm{id}(s\restriction B))]\!]_{\sharp_1 B} = \mathrm{plg}_A(s) \tag{5.16}$$

où id est l'opération définie dans le lemme 4.27. La vérification de cette remarque est facile et coïncide pour l'essentiel avec la vérification des égalités

$$[\![\mathrm{id}(s\restriction A) \fatsemi s]\!]_A = s \quad \text{et} \quad [\![s \fatsemi \mathrm{id}(s\restriction B)]\!]_B = s.$$

L'égalité (5.13) est une conséquence directe de (5.15) et de (5.11).

Soient $t \in \sharp_1 f$, $s' \in \mathrm{der}_B$ et $q \in S_{\sharp_1 B}$ tels que $t\restriction \sharp_1 B = s'\restriction \sharp_1 B = q$. Si $q = \varepsilon$ alors $s' = \varepsilon$ et $t = \varepsilon$, comme $\varepsilon \in f$ et $\varepsilon \in \mathrm{der}_A$ on en déduit que $t \fatsemi s' \in \mathrm{der}_A \fatsemi f$. On suppose maintenant que $q \neq \varepsilon$. Par la remarque 5.19, il existe un élément p de S_B tel que $s' = \mathrm{plg}_{B_l}(\mathrm{id}(p))$ à oubli des indices l et r près (où id est l'opération définie dans le lemme 4.27). Ainsi $q = \mathrm{plg}(p)$. Par définition de $\sharp_1 f$ et par la remarque 5.5, il existe un multi-ensemble $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f \setminus \{\varepsilon\})$ tel que le mot t est un élément de $\bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$. On a alors $t\restriction \sharp_1 B \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu\restriction B)$, et $s'\restriction \sharp_1 B \in \bigodot \mathrm{plg}([p])$ et, d'après le lemme 5.2, $\mu\restriction B = [p]$. Ainsi il existe un élément $s \in f$ tel que $\mu = [s]$ et $s\restriction B = p$. On a alors $t = \mathrm{plg}_{A,B}(s)$ et comme $s' = \mathrm{plg}_{B_l}(\mathrm{id}(s\restriction B))$, par (5.16), on en déduit que $[\![t \fatsemi s]\!]_{\sharp_1 B}$. On en conclut que $\sharp_1 f \fatsemi \mathrm{der}_B \subseteq \mathrm{plg}_A(f)$.

L'inclusion $\mathrm{plg}_A(f) \subseteq \sharp_1 f \fatsemi \mathrm{der}_B$ est facile : si t est un élément de $\mathrm{plg}_A(f)$ c'est que $t = \mathrm{plg}_B(s)$ pour un certain élément s de f il suffit alors de considérer $\sigma = \mathrm{plg}_{A,B}(s)$ qui est un élément de $\sharp_1 f$ et de considérer $\mathrm{plg}_B(\mathrm{id}(s\restriction B))$ qui est un élément de der_B pour avoir $[\![\sigma \fatsemi s']\!]_{\sharp_1 B} = t$. □

Nous allons maintenant définir une transformation naturelle de $\sharp_1$ en $\sharp_1 \sharp_1$ dans $\mathbf{JNA}$.

Toute partie terminée de $\sharp_1 \sharp_1 A$ ne définit pas forcément une partie terminée de $\sharp_1 A$ de manière canonique. Par exemple, considérons $A = \textbf{bool} \,\&\, \textbf{bool}$. Le mot

$$t = \big((\bot_1)\big) \begin{pmatrix} (\bot_1) \\ (\bot_1\ \mathtt{v}_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bot_1) \\ (\bot_1\ \mathtt{v}_1) \\ (\bot_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bot_1) \\ (\bot_1\ \mathtt{v}_1) \\ (\bot_2) \\ (\bot_2\ \mathtt{v}_2) \end{pmatrix} \big((\bot_2)\big) \begin{pmatrix} (\bot_2) \\ (\bot_2\ \mathtt{f}_2) \end{pmatrix}$$

est une partie terminée de $\sharp_1 \sharp_1 A$. Pourtant Il n'y a pas de partie terminée dans $\sharp_1 A$, contenant tous les éléments de $P(A)$ qui apparaissent dans t. Ceci car il n'y a pas de stratégie sur A contenant $(\bot_2 \mathtt{v}_2)$ et $(\bot_2 \mathtt{f}_2)$.

Pour une partie terminée t de $\sharp_1 \sharp_1 A$ on note $o^2(\sigma)$ l'ensemble des partie terminée de A apparaissant dans t. Une condition nécessaire pour qu'il existe un mot de $\sharp_1 A$ employant tous les éléments de $o^2(t)$ (donc aussi tous les éléments de $P(A)$ apparaissant dans t) est que $o^2(t)$ soit une stratégie de A. (Cette stratégie est alors saturée.) Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante.

Soit sor une opération définie sur les mots de mots non vides sur un alphabet A (*i.e.* sur les éléments de $(A^* \setminus \{\varepsilon\})^*$), en posant, $\mathrm{sor}(t \cdot (p \cdot a)) = \mathrm{sor}(t) \cdot (a)$ et $\mathrm{sor}(\varepsilon) = \varepsilon$. On a alors $\mathrm{sor}(\mathrm{plg}(t)) = t$. Dans la suite on utilisera surtout cette opération sur des mots de mots non vides de mots (*i.e.* des éléments de $(A^{**} \setminus \{\varepsilon\})^*$, pour un certain alphabet A).

Proposition 5.21. *Si t est une partie terminée de $\sharp_1 \sharp_1 A$ telle que $o^2(t) \in \mathrm{St}(A)$ alors le mot $\mathrm{sor}(t)$ est une partie terminée de $\sharp_1 A$.*

Démonstration. Si $t_1 \in S_{\sharp_1 A}$, si $t' \in S_{\sharp_1 \sharp_1 A}$ et si $t \in t' \odot \mathrm{plg}(t_1)$ alors $\mathrm{sor}(\mathrm{plg}(t_1)) = t_1$, $\mathrm{sor}(t) \in \mathrm{sor}(t') \odot t_1$ et $o^2(t) = o^2(t') \cup o(t_1)$. On en déduit que si

$$t \in \bigodot \Big[\mathrm{plg}(\bigodot \mathrm{plg}(\mu_1)), \dots, \mathrm{plg}(\bigodot \mathrm{plg}(\mu_n))\Big], \tag{5.17}$$

pour une famille de multi-ensembles $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(A)$, alors

$$\mathrm{sor}(t) \in \bigodot \left[\bigodot \mathrm{plg}(\mu_1), \ldots, \bigodot \mathrm{plg}(\mu_n)\right] = \bigodot \mathrm{plg}(\sum_{1\leq i\leq n} \mu_i)$$

et $o^2(t) = o(\mathrm{sor}(t)) \supseteq \mathrm{supp}(\sum_{1\leq i\leq n} \mu_i)$. Or, si t est un élément de $S_{\sharp_1 \sharp_1 A}$ alors il existe un multi-ensemble fini $[\mu_1, \ldots, \mu_n]$ de multi-ensembles finies d'éléments de S_A tels que (5.17). Finalement, si t est un élément de $S_{\sharp_1 \sharp_1 A}$ tel que $o^2(t) \in \mathrm{St}(A)$ alors il existe un multi-ensemble fini μ d'éléments de S_A dont le support est une stratégie et tel que $\mathrm{sor}(t) \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu)$ donc $\mathrm{sor}(t) \in S_{\sharp_1 A}$. □

Si $B^* \setminus \{\varepsilon\}$ est un sous-alphabet d'un alphabet C on définit de même une opération sor_B sur les éléments de C^*, en posant $\mathrm{sor}_B(t \cdot c) = \mathrm{sor}_B(t) \cdot b$ si $c = (p \cdot b)$ est un élément de B^*, $\mathrm{sor}_B(t \cdot c) = \mathrm{sor}_B(t) \cdot c$ si c n'est pas un élément de B^* et $\mathrm{sor}_B(\varepsilon) = \varepsilon$. Si B est un jeu négatif et si t est une partie dans un jeu négatif, alors $\mathrm{sor}(t{\restriction} \sharp_1 B) = \mathrm{sor}_B(t){\restriction}B$. Dans la suite on utilisera le plus souvent sor_B lorsque B sera égal à un alphabet de mot $A*$.

Proposition 5.22 (Excavation). *Pour chaque jeu négatif affine A on pose*

$$\mathrm{dig}^1_A = \{s \in S_{\sharp_1 A \multimap \sharp_1 \sharp_1 A} \mid \forall p \preccurlyeq^{\mathsf{J}} s, p{\restriction}(\sharp_1 A) = \mathrm{sor}(p{\restriction}(\sharp_1 \sharp_1 A))\}$$

Alors, dans $\mathbf{JNA}$, la famille $\mathrm{dig}^1 = (\mathrm{dig}^1_A)_{A\in\mathbf{JNA}}$ est une transformation naturelle de $\sharp_1$ en $\sharp_1 \sharp_1$.

Remarque 5.23 *(caractérisation de l'excavation).* Si A est un jeu affine alors, à oubli des indices l et r près,

$$\mathrm{dig}^1_A = \{\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{id}(p)) \mid p \in S_{\sharp_1 \sharp_1 A} \text{ et } o^2(p) \in \mathrm{St}(A)\}. \tag{5.18}$$

Démonstration de la proposition 5.22. Il faut montrer que pour chaque jeu négatif affine A, dig^1_A est un morphisme affine de $\sharp_1 A$ vers $\sharp_1 \sharp_1 A$.

On commence par montrer que dig^1_A est un sous-ensemble de $S_{\sharp_1 A \multimap \sharp_1 \sharp_1 A}$ contenant la partie vide, en utilisant la caractérisation (5.18) des éléments de dig^1_A. On a $o^2(\varepsilon) = \emptyset \in \mathrm{St}(A)$ donc $\varepsilon \in \mathrm{dig}^1_A$. Soit $p \in S_{\sharp_1 A \sharp_1 A}$ tel que $o^2(p) \in \mathrm{St}(A)$. Alors $\mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)){\restriction} \sharp_1 \sharp_1 A_r$ est un élément de $S_{\sharp_1 \sharp_1 A_r}$ et $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{id}(p)){\restriction} \sharp_1 A_l$ est égal à l'élément $\mathrm{sor}(p)$ de $S_{\sharp_1 A_l}$. De plus, $\mathrm{id}(p)$ est un mot sur l'alphabet $P^{\mathsf{O}}(\sharp_1 A_r) \cdot P^{\mathsf{O}}(\sharp_1 A_l) \cdot P^{\mathsf{J}}(\sharp_1 A_l) \cdot P^{\mathsf{J}}(\sharp_1 A_r)$ donc $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{id}(p))$ est un mot sur l'alphabet $P^{\mathsf{O}}(\sharp_1 A_r) \cdot P^{\mathsf{O}}(A_l) \cdot P^{\mathsf{J}}(A_l) \cdot P^{\mathsf{J}}(\sharp_1 A_r)$. Ainsi $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{id}(p))$ est bien une partie terminée de $\sharp_1 A \multimap \sharp_1 \sharp_1 A$.

Il reste à montrer que dig^1_A est déterministe. Soient p_1 et p_2 deux éléments de $S_{\sharp_1 \sharp_1 A}$ tels que $o^2(p_1), o^2(p_2) \in \mathrm{St}(A)$, soient $s_1 = \mathrm{id}(p_1)$ et $s_2 = \mathrm{id}(p_2)$ et soit $p = p_1 \wedge p_2$. Il faut montrer que $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_1) \wedge \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_2)$ est de longueur paire. Si $p_1 = p_2$ alors $s_1 = s_2$ et $\mathrm{sor}(s_1) = \mathrm{sor}(s_2)$ donc $\mathrm{sor}(s_1) = \mathrm{sor}(s_2)$ est de longueur paire. On peut donc supposer que $p_1 \neq p_2$. Par construction, $\mathrm{id}(p_1) \wedge \mathrm{id}(p_2)$ est égal à l'élément $\mathrm{id}(p_1 \wedge p_2)$ de $P^{\mathsf{J}}(\sharp_1 \sharp_1 A_l \multimap \sharp_1 \sharp_1 A_r)$. De plus, $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_1) \wedge \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_2)$ est un préfixe de $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_1 \wedge s_2)$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_1 \wedge s_2)$ est un préfixe de $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_1) \wedge \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(s_2)$.

On fait deux cas. Supposons que $p \in P^{\mathsf{O}}(\sharp_1 \sharp_1 A)$. Alors il existe deux coups différents $(\sigma_1 \cdot (\rho_1 \cdot a^{\mathsf{O}}_1))$ et $(\sigma_2 \cdot (\rho_2 \cdot a^{\mathsf{O}}_2))$ dans $\sharp_1 \sharp_1 A$ tels que

$$\begin{aligned} &p \cdot (\sigma_1 \cdot (\rho_1 \cdot a^{\mathsf{O}}_1)) \preceq p_1 \quad \text{et} \\ &p \cdot (\sigma_2 \cdot (\rho_2 \cdot a^{\mathsf{O}}_2)) \preceq p_2. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p \cdot (\sigma_1 \cdot (\rho_1 \cdot a^{\mathsf{O}}_1)))) &= \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)) \cdot (\sigma_{1,r} \cdot (\rho_{1,r} \cdot a^{\mathsf{O}}_{1,r}))(\rho_{1,l} \cdot a^{\mathsf{O}}_{1,l}) \quad \text{et} \\ \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p \cdot (\sigma_2 \cdot (\rho_2 \cdot a^{\mathsf{O}}_2)))) &= \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)) \cdot (\sigma_{2,r} \cdot (\rho_{2,r} \cdot a^{\mathsf{O}}_{2,r}))(\rho_{2,l} \cdot a^{\mathsf{O}}_{2,l}). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{sor}(s_1) \wedge \mathrm{sor}(s_2) \in P^{\mathsf{J}}(\sharp_1 A_l \multimap \sharp_1 \sharp_1 A_r)$.

Supposons que $p \in P^{\mathrm{J}}(\sharp_1 \sharp_1 A)$. Alors il existe deux coups différents $(\sigma_1 \cdot (\tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}})(\rho_1 \cdot a_1^{\mathrm{J}}))$ et $(\sigma_2 \cdot (\tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}})(\rho_2 \cdot a_2^{\mathrm{J}}))$ dans $\sharp_1 \sharp_1 A$ tels que

$$\begin{aligned} &p \cdot (\sigma_1 \cdot (\tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}})(\rho_1 \cdot a_1^{\mathrm{J}})) \preceq p_1 \quad \text{et} \\ &p \cdot (\sigma_2 \cdot (\tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}})(\rho_2 \cdot a_2^{\mathrm{J}})) \preceq p_2. \end{aligned}$$

Par construction de $S_{\sharp_1 \sharp_1 A}$ le dernier coup de p est nécessairement égal à $(\sigma_1 \cdot (\tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}}))$ et à $(\sigma_2 \cdot (\tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}})$, ainsi $\sigma_1 = \sigma_2$, $\tau_1 = \tau_2$ et $a_1^{\mathrm{O}} = a_2^{\mathrm{O}}$. De plus, par construction de $\sharp_1 A$, $\rho_1 = \tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}}$ et $\rho_2 = \tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}}$. Et, comme

$$(\sigma_1 \cdot (\tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}})(\rho_1 \cdot a_1^{\mathrm{J}})) \neq (\sigma_2 \cdot (\tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}})(\rho_2 \cdot a_2^{\mathrm{J}})),$$

on en déduit que $a_1^{\mathrm{J}} \neq a_2^{\mathrm{J}}$. Or

$$\begin{aligned} &\mathrm{sor}(\mathrm{id}(p \cdot (\sigma_1 \cdot (\tau_1 \cdot a_1^{\mathrm{O}})(\rho_1 \cdot a_1^{\mathrm{J}})))) = \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)) \cdot (\rho_{1,l} \cdot a_{1,l}^{\mathrm{J}})(\sigma_{1,r} \cdot (\rho_{1,r} \cdot a_{1,r}^{\mathrm{J}})) \quad \text{et} \\ &\mathrm{sor}(\mathrm{id}(p \cdot (\sigma_2 \cdot (\tau_2 \cdot a_2^{\mathrm{O}})(\rho_2 \cdot a_2^{\mathrm{J}})))) = \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)) \cdot (\rho_{2,l} \cdot a_{2,l}^{\mathrm{J}})(\sigma_{2,r} \cdot (\rho_{2,r} \cdot a_{2,r}^{\mathrm{J}})) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{sor}(s_1) \wedge \mathrm{sor}(s_2) = \mathrm{sor}(\mathrm{id}(p)) \in P^{\mathrm{J}}(\sharp_1 A_l \multimap \sharp_1 \sharp_1 A_r)$.

Ainsi dig_A^1 est bien un morphisme affine de $\sharp_1 A$ vers $\sharp_1 \sharp_1 A$.

Il faut montrer que si f est un morphisme affine de A vers B alors $\mathrm{dig}_A^1 \mathbin{⨟} \sharp_1 \sharp_1 f = \sharp_1 f \,\mathrm{com}_X\, \mathrm{dig}_A^1$ (*i.e.* le diagramme suivant commute).

$$\begin{tikzcd} \sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{dig}_A^1"] \arrow[d, "\sharp_1 f"'] & \sharp_1 \sharp_1 A \arrow[d, "\sharp_1 \sharp_1 f"] \\ \sharp_1 B \arrow[r, "\mathrm{dig}_B^1"'] & \sharp_1 \sharp_1 B \end{tikzcd} .$$

On montre en fait que

$$\mathrm{dig}_A^1 \mathbin{⨟} \sharp_1 \sharp_1 f = \{\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s) \mid s \in \sharp_1 \sharp_1 f \text{ et } o^2(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\}, \tag{5.19}$$
$$\sharp_1 f \mathbin{⨟} \mathrm{dig}_B^1 \subseteq \{\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s) \mid s \in \sharp_1 \sharp_1 f \text{ et } o^2(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\} \quad \text{et} \tag{5.20}$$
$$\sharp_1 f \mathbin{⨟} \mathrm{dig}_B^1 \supseteq \{\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s) \mid s \in \sharp_1 \sharp_1 f \text{ et } o^2(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\}. \tag{5.21}$$

L'égalité (5.19) se montre facilement. En effet, l'équation (5.18) implique que

$$\mathrm{dig}_A^1 = \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{s \in I_{\sharp_1 \sharp_1 A} \mid (s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A_r)\}) \tag{5.22}$$

Ainsi, avec notre convention sur les indices l et r,

$$\begin{aligned} \mathrm{dig}_A^1 \mathbin{⨟} \sharp_1 \sharp_1 f &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{s \in I_{\sharp_1 \sharp_1 A} \mid (s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A_r)\}) \mathbin{⨟} \sharp_1 \sharp_1 f \\ &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A} \mathbin{⨟} \{s \in \sharp_1 \sharp_1 f \mid o^2(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\}) \\ &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(\{s \in \sharp_1 \sharp_1 f \mid o^2(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\}) \end{aligned}$$

d'où l'égalité (5.19).

On montre l'inclusion (5.20). Soit $s \in \sharp_1 f$ et $s' \in \mathrm{dig}_B^1$ tels que $s\restriction \sharp_1 B = s'\restriction \sharp_1 B$. Soit $t \in S_{\sharp_1 \sharp_1 B}$ tel que $o^2(t) \in \mathrm{St}(A)$ et $\mathrm{sor}_{\sharp_1 B_l}(\mathrm{id}(t)) = s'$. Alors il existe un multi-ensemble fini $[t_1, \ldots, t_n]$ d'éléments de $\sharp_1 B$ et, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un multi-ensemble fini μ_i' d'éléments de S_B tels que

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \ldots, n\}, t_i \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu_i'), \\ t \in \bigodot[\mathrm{plg}(t_1), \ldots, \mathrm{plg}(t_n)] \subseteq \bigodot \mathrm{plg}([\bigodot \mathrm{plg}(\mu_1'), \ldots, \bigodot \mathrm{plg}(\mu_n')]), \\ \mathrm{sor}(t) \in \bigodot[\bigodot \mathrm{plg}(\mu_1'), \ldots, \bigodot \mathrm{plg}(\mu_n')] = \bigodot \sum_{i \in \{1, \ldots, n\}} \mathrm{plg}(\mu_i'). \end{aligned}$$

Et, il existe un multi-ensemble fini $\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(f)$ tel que $s \in \bigodot_B \mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$. On pose $\mu' = \sum_{i=1}^n \mu'_i$. On a

$$s\restriction \sharp_1 B = \mathrm{sor}(t) \in \bigodot \mathrm{plg}(\mu\restriction B) \cap \bigodot \mathrm{plg}(\mu')$$

donc, d'après le lemme 5.2, $\mu' = \mu\restriction B$. Par le lemme 5.6, pour chaque élément m de $\mu\restriction B$, il existe un unique élément p de μ tel que $p\restriction B = m$. Donc, pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un unique multi-ensemble μ_i d'éléments de μ tel que $\mu_i\restriction B = \mu'_i$ et $\sum_{i=1}^n \mu_i = \mu$. D'après le lemme 5.9, pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un (unique) $s_i \in \bigodot_B \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_i)$ tel que $s_i\restriction \sharp_1 B = t_i$ et ce s_i s'obtient en remplaçant dans t_i chaque facteur $(q)(q\cdot b^\lrcorner)$ par l'unique mot $(q)\ldots(q\cdot b^\lrcorner)$ facteur d'au moins l'un des élément de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu_i)$. À nouveau par le lemme 5.9 le multi-ensemble $[s_1,\ldots,s_n]$ et le mot t déterminent un unique élément s'' de $\bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{\sharp_1 A,\sharp_1 B}([s_1,\ldots,s_n])$ tel que $s''\restriction \sharp_1\sharp_1 B = t$. Le mot s'' est un élément de $\sharp_1\sharp_1 f$ et $o^2(s''\restriction(\sharp_1\sharp_1 A)) = \cup_{1\leq i\leq n} o(s_i) = o(s)$ est une stratégie de A. Le mot $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s'')$ est donc un élément de $\{\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s) \mid s \in \sharp_1\sharp_1 f$ et $o^2(s\restriction \sharp_1\sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)\}$.

On conclut cette partie de la preuve en montrant que $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s'') = [\![s \,\S\, s']\!]_{\sharp_1 B}$.

D'après le lemme 5.9, le mot s'' s'obtient en remplaçant chaque facteur $(\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(qb^\lrcorner))$ de t par l'unique mot $(\sigma\cdot(q))\cdot\rho\cdot(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ facteur d'au moins l'un des $\mathrm{plg}_{\sharp_1 A,\sharp_1 B}(t_i)$ (où $\rho \in P(A)^{**}$). Mais si $(\sigma\cdot(q))\cdot\rho\cdot(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ est facteur de $\mathrm{plg}(t_i)$ alors $(q)\cdot\mathrm{sor}(\rho)\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est facteur de t_i et ainsi $(q)\cdot\mathrm{sor}(\rho)\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}(\mu_i)$. Finalement $(q)\cdot\mathrm{sor}(\rho)\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est l'unique mot facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}(\mu)$. En effet, comme $\mathrm{supp}(\mu)\restriction A \in \mathrm{St}(A)$, par le lemme 5.6, pour chaque $(q\cdot b^\lrcorner)$ apparaissant dans l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu_i)$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un unique mot $(q)\ldots(q\cdot b^\lrcorner)$ facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$.

On en conclut que $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s'')$ s'obtient en remplaçant chaque facteur $(\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ de t par le mot $(\sigma\cdot(q))\cdot m\cdot(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ où $(q)\cdot m\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est l'unique mot facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$.

Par ailleurs, d'après la remarque 5.23, le mot s' est obtenu en remplaçant dans t chaque facteur $(\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ par le facteur

$$(\sigma\cdot(q))\cdot\mathrm{sor}((\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner)))\cdot(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner)) = (\sigma\cdot(q))(q)(q\cdot b^\lrcorner)(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner)).$$

D'après le lemme 5.9, le mot s s'obtient en remplaçant dans $\mathrm{sor}(t)$ chaque facteur $(q)(q\cdot b^\lrcorner)$ par l'unique mot $(q)\cdot m\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$.

Le témoin $[\![s \,\S\, s']\!]$ de la composition de s et de s' s'obtient en remplaçant dans t chaque facteur $(\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ par un mot

$$(\sigma\cdot(q))(q)\cdot m\cdot(q\cdot b^\lrcorner)(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$$

où $(q)\cdot m\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est l'unique mot $(q)\ldots(q\cdot b^\lrcorner)$ facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$.

Donc, finalement, $[\![s \,\S\, s']\!]_{\sharp_1 B}$ s'obtient en remplaçant chaque facteur $(\sigma\cdot(q))(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ de t par le mot $(\sigma\cdot(q))\cdot m\cdot(\sigma\cdot(q)(q\cdot b^\lrcorner))$ où $(q)\cdot m\cdot(q\cdot b^\lrcorner)$ est l'unique mot facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$. Et, par déterminisme de cette opération de remplacement, ceci conclut à l'égalité de $[\![s \,\S\, s']\!] = s''$.

On montre l'inclusion (5.21). Soit s'' un élément de $\sharp_1\sharp_1 f$ tel que $o^2(s'') \in \mathrm{St}(A)$. Alors il existe un multi-ensemble $[s_1,\ldots,s_n]$ et pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe un multi-ensemble μ_i tels que

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, s_i \in \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu_i),$$

$$s'' \in \bigodot_{\sharp_1\sharp_1 B} [\mathrm{plg}_{\sharp_1 A,\sharp_1 B}(s_1),\ldots,_{\sharp_1 A,\sharp_1 B}(s_n)],$$

$$o^2(s''\restriction \sharp_1\sharp_1 A) = \cup_{1\leq i\leq n} o(s_i) \supseteq \mathrm{supp}(\sum_{i=1}^n (\mu_i\restriction A))$$

Soit $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et $t = s'' \upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 B$.

Comme $o^2(s'' \upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A)$ est une stratégie, $\mathrm{supp}(\mu \upharpoonright A)$ est aussi une stratégie et, par la proposition 4.29, $\mathrm{supp}(\mu \upharpoonright B)$ est une stratégie et $o^2(t) = S_B \cap \nabla \, \mathrm{supp}(\mu \upharpoonright B)$ aussi. Ainsi on peut considérer l'élément $s' = \mathrm{sor}_{\sharp_1 B_l}(\mathrm{id}(t))$ de dig^1_B. La projection de cet élément sur $\sharp_1 B$ est $\mathrm{sor}(t)$ et c'est un élément de $\bigodot \mathrm{plg}(\mu \upharpoonright A)$.

D'après le lemme 5.9, il existe un unique élément s de $\sharp_1 f$ tel que $s \in \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$ et $s \upharpoonright \sharp_1 B = t$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $[\![s \fatsemi s']\!]_{\sharp_1 B} = s''$. On obtient comme précédemment que : le mot $[\![s \fatsemi s']\!]_{\sharp_1 B}$ est obtenu en remplaçant dans t chaque facteur $(\sigma \cdot (q))(\sigma \cdot (q)(q \cdot b^{\mathsf{J}}))$ par le mot $(\sigma \cdot (q)) \cdot m \cdot (\sigma \cdot (q)(q \cdot b^{\mathsf{J}}))$ où $(q) \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathsf{J}})$ est l'unique mot facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$; et que $\mathrm{sor}_{\sharp_1 A}(s'')$ est obtenu en remplaçant dans t chaque facteur $(\sigma \cdot (q))(\sigma \cdot (q)(q \cdot b^{\mathsf{J}}))$ par le mot $(\sigma \cdot (q)) \cdot m \cdot (\sigma \cdot (q)(q \cdot b^{\mathsf{J}}))$ où $(q) \cdot m \cdot (q \cdot b^{\mathsf{J}})$ est l'unique mot facteur d'au moins l'un des éléments de $\mathrm{plg}_{A,B}(\mu)$. Ce qui conclut. $\square$

Proposition 5.24. *Le triplet* $(\sharp_1, \mathrm{der}, \mathrm{dig}^1)$ *forme une comonade sur la catégorie des jeux négatifs affines* $\mathbf{JNA}$.

Démonstration. Il faut montrer que les trois diagrammes suivants commutent pour tout jeu négatif affine A :

$$\begin{tikzcd} \sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{dig}^1_A"] \arrow[dr, "\sharp_1 I_A"'] & \sharp_1 \sharp_1 A \arrow[d, "\sharp_1 \mathrm{der}_A"] \\ & \sharp_1 A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{dig}^1_A"] \arrow[dr, "I_{\sharp_1 A}"'] & \sharp_1 \sharp_1 A \arrow[d, "\mathrm{der}_{\sharp_1 A}"] \\ & \sharp_1 A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{dig}^1_A"] \arrow[d, "\mathrm{dig}^1_A"'] & \sharp_1 \sharp_1 A \arrow[d, "\sharp_1 \mathrm{dig}^1_A"] \\ \sharp_1 \sharp_1 A \arrow[r, "\mathrm{dig}^1_{\sharp_1 A}"'] & \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A \end{tikzcd}$$

D'après (5.22),

$$\begin{aligned} \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \sharp_1 \mathrm{der}_A &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{ s \in \sharp_1 \sharp_1 I_A \mid o^2(s \upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A) \}) \fatsemi \sharp_1 \mathrm{der}_A \\ &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\sharp_1 \sharp_1 I_A \fatsemi \{ s \in \sharp_1 \mathrm{der}_A \mid o^2(s \upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(A) \}). \end{aligned}$$

D'après (5.11), $\mathrm{der}_A = \mathrm{plg}_{A_l}(I_A)$. Donc si $\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{der}_A)$ alors $\mathrm{supp}(\mu \upharpoonright \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)$ ssi $\mathrm{supp}(\mu \upharpoonright A) \in \mathrm{St}(A)$,

$$\sharp_1 \mathrm{der}_A = \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_A) \\ \mu \upharpoonright A_r \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 A} \mathrm{plg}_{\sharp_1 A_l, A}(\mathrm{plg}_{A_l}(\mu))$$

et si $s \in \sharp_1 \mathrm{der}_A$ alors $o^2(s \upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l) = o(s \upharpoonright \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \sharp_1 \mathrm{der}_A &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\sharp_1 \sharp_1 I_A \fatsemi \sharp_1 \mathrm{der}_A) \\ &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\sharp_1 \mathrm{der}_A) \\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_A) \\ \mu \upharpoonright A_l \in \mathrm{St}(A)}} \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l} \left(\bigodot_{\sharp_1 A} \mathrm{plg}_{\sharp_1 A_l, A}(\mathrm{plg}_{A_l}(\mu)) \right) \\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_A) \\ \mu \upharpoonright A_l \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 A} \mathrm{plg}_A(\mathrm{plg}_{A_l}(\mu)) \\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_A) \\ \mu \upharpoonright A_l \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 A} \mathrm{plg}_{A_l, A}(\mu) \\ &= \sharp_1 I_A \end{aligned}$$

Ceci conclut pour le premier diagramme.

À nouveau d'après (5.22) et (5.11),

$$\begin{aligned}\mathrm{dig}^1_A \fatsemi \mathrm{der}_{\sharp_1 A} &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\sharp_1 \sharp_1 I_A \fatsemi \{\mathrm{plg}_{A_l}(s) \in I_{\sharp_1 A} \mid o^2(\mathrm{plg}(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(A)\})\\ &= \{s \in I_{\sharp_1 A} \mid o(s\restriction \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(A)\}\\ &= I_{\sharp_1 A}\end{aligned}$$

ce qui conclut pour le deuxième diagramme.

Si m est un élément de $S_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A}$ on pose

$$o^3(m) = \cup_{m' \in o(m)} o^2(m') = \cup_{m'' \in o^2(m)} o(m'').$$

Si t est un témoin de la composition de dig^1_A avec $\sharp_1 \mathrm{dig}^1_A$ alors $o(t\restriction \sharp_1 A) = o^2(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) = o^3(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)$. Et si t est un témoin de la composition de dig^1_A avec $\mathrm{dig}^1_{\sharp_1 A}$ alors $o(t\restriction \sharp_1 A) = o^2(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 A) = o^3(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)$.

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{dig}^1_A \fatsemi \sharp_1 \mathrm{dig}^1_A &= \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \{s \in \sharp_1 \mathrm{dig}^1_A \mid o^3(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\} \quad \text{et}\\ \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \mathrm{dig}^1_{\sharp_1 A} &= \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \{s \in \mathrm{dig}^1_{\sharp_1 A} \mid o^3(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\}.\end{aligned}$$

D'où, par (5.22),

$$\begin{aligned}\mathrm{dig}^1_A \fatsemi \sharp_1 \mathrm{dig}^1_A &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{s \in \sharp_1 \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A}) \mid o^3(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\}) \quad \text{et}\\ \mathrm{dig}^1_A \fatsemi \mathrm{dig}^1_{\sharp_1 A} &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{\mathrm{sor}_{\sharp_1 \sharp_1 A_l}(s') \mid s' \in \sharp_1 I_{\sharp_1 \sharp_1 A} \text{ et } o^3(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\}).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer l'égalité entre les deux ensembles

$$\begin{aligned}E_1 &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{s \in \sharp_1 \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A}) \mid o^3(s\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\}) \quad \text{et}\\ E_2 &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\{\mathrm{sor}_{\sharp_1 \sharp_1 A_l}(s') \mid s' \in \sharp_1 I_{\sharp_1 \sharp_1 A} \text{ et } o^3(s'\restriction \sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A)\})\end{aligned}$$

pour conclure à la commutation du troisième diagramme.

Or, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}E_1 &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}\left(\bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A}) \\ \mathrm{sor}(\mathrm{supp}(\mu)\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(\sharp_1 A_l) \\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{plg}_{\sharp_1 A_l, \sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mu)) \right)\\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A}) \\ \mathrm{sor}(\mathrm{supp}(\mu)\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(\sharp_1 A_l) \\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{plg}_{\sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mu))\\ &= \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathsf{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A}) \\ \mathrm{sor}(\mathrm{supp}(\mu)\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_l) \in \mathrm{St}(\sharp_1 A_l) \\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\restriction \sharp_1 \sharp_1 A_r) \in \mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{plg}_{\sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mu))\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}\left(\mathrm{sor}_{\sharp_1 \sharp_1 A_l}\left(\bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A})\\ \mathrm{supp}(\mu)\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l\in\mathrm{St}(\sharp_1 \sharp_1 A_l)\\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_r)\in\mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{plg}_{\sharp_1 A_l\, \sharp_1 A_l, \sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mu)\right)\right)\\
&= \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}\left(\bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A})\\ \mathrm{supp}(\mu)\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l\in\mathrm{St}(\sharp_1 \sharp_1 A_l)\\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_r)\in\mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{plg}_{\sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mu)\right)\\
&= \bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I_{\sharp_1 \sharp_1 A})\\ \mathrm{supp}(\mu)\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l\in\mathrm{St}(\sharp_1 \sharp_1 A_l)\\ \cup_{t\in\mu} o^2(t\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_r)\in\mathrm{St}(A_r)}} \bigodot_{\sharp_1 \sharp_1 \sharp_1 A_r} \mathrm{sor}_{\sharp_1 A_l}(\mathrm{plg}_{\sharp_1 \sharp_1 A_r}(\mu))
\end{aligned}
$$

Mais, si $\cup_{t\in\mu} o^2(t\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_r)$ est une stratégie de A_r alors $\mathrm{sor}(\mathrm{supp}(\mu)\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l)$ est une stratégie de $\sharp_1 A_l$ et $\mathrm{supp}(\mu)\upharpoonright \sharp_1 \sharp_1 A_l$ est une stratégie de $\sharp_1 \sharp_1 A_l$. Donc $E_1 = E_2$ et ceci conclut la preuve. □

La comonade $(\sharp_1, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ définit une catégorie de co-Kleisli, notée K, et une adjonction $(\dagger_1, U, \mathrm{der}, \eta)$ entre $\mathbf{JNA}$ et K (voir [Lan97]). Les objets de K sont les objets de $\mathbf{JNA}$, les éléments de $K(A, B)$ sont les éléments de $\mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$, pour tout objet A, le morphisme identité sur A est der_A et la composition dans K, notée $\fatsemi_K$, est définie comme suit. Si f est un élément de $K(A, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$ et si g est un élément de $K(B, C) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 B, C)$ alors $f \fatsemi_K g$ est l'élément de $K(A, C) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, C)$ égal à $(\mathrm{dig}_A \fatsemi \sharp_1 f) \fatsemi g$. La construction $\dagger_1$ est un foncteur de K dans $\mathbf{JNA}$ qui à chaque objet A associe l'objet $\sharp_1 A$ et à chaque élément f de $K(A, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$ associe l'élément $\mathrm{dig}_A \fatsemi \sharp_1 f$, noté $f^{\dagger_1}$, de $\mathbf{JNA}(\sharp_1 A, \sharp_1 B)$. La construction U est un foncteur d'oubli de $\mathbf{JNA}$ dans K qui laisse les objets invariants et qui associe à chaque élément de $\mathbf{JNA}(A, B)$ l'élément $\mathrm{der}_A \fatsemi f$ de $K(A, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$. On a $\dagger_1 U = \sharp_1$ et ainsi der est une transformation naturelle de $\dagger_1 U$ vers I. La famille $\eta = (\eta_A)_{a\in K}$ est une transformation naturelle triviale du foncteur identité de K vers le foncteur $U\dagger_1$ (et $\eta_A = I_{\sharp_1 A}$ est un élément de $K(A, \sharp_1 A)$).

Du fait de la présence des isomorphismes naturels de la proposition 5.17, K est cartésienne fermée. Sa structure cartésienne est adaptée directement de celle de $\mathbf{JNA}$ comme suit. L'objet terminal est $\wr$ (l'objet terminal de $\mathbf{JNA}$) et l'unique morphisme de $K(A, \wr)$ est bien entendu l'unique morphisme de $\mathbf{JNA}(\sharp_1 A, \wr)$. Le produit Cartésien $A \,\&_K\, B$ de deux objets A et B est simplement le produit Cartésien $A \,\&\, B$ dans $\mathbf{JNA}$. Si A et B sont disjoints, si f est un élément de $K(C, A) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 C, A)$ et si g est un élément de $K(C, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 C, B)$ alors le couplage de f et g est l'élément $f \cup g$ de $K(C, A \,\&\, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 C, A \,\&\, B)$. Les projections sont les identités sur A et sur B prises respectivement de $A \,\&\, B$ dans A et de $A \,\&\, B$ dans B. Finalement, si $f \in \mathcal{K}(A, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$ et $g \in \mathcal{K}(A', B') = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A', B')$ alors le produit $f \,\&_K\, g$ de f et g dans $\mathcal{K}$ est égal à $\mathrm{AvTn}_{A,A'} \fatsemi f^\dagger \odot g^\dagger \fatsemi \mathrm{TnAv}_{B,B'} \fatsemi \mathrm{der}_{B\&B} = f \cup g$.

Proposition 5.25. *Si $f \in K(A, B) = \mathbf{JNA}(\sharp_1 A, B)$ alors*

$$
f^{\dagger_1} = \bigcup_{\substack{\mu\in\mathcal{M}_{\mathit{fin}}(f)\\ \cup_{s\in\mu} o(s\upharpoonright \sharp_a A)\in\mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_B(\mu). \tag{5.23}
$$

Démonstration. Par définition $f^{\dagger_1} = \mathrm{dig}^1_A \mathbin{;} \sharp_1 f$. En utilisant l'égalité (5.22), on obtient

$$f^{\dagger_1} = \mathrm{sor}_{\sharp_1 A}\left(\bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \mathrm{supp}(\mu \restriction \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(\sharp_1 A) \\ \cup_{s \in \mu} o(s \restriction \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{\sharp_1 \sharp_1 A_l, \sharp_1 B}(\mu) \right).$$

Mais, si $\cup_{t \in \mu \restriction \sharp_1 A_l} o(t) \in \mathrm{St}(A)$ alors $\mathrm{supp}(\mu \restriction \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(\sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)$, donc

$$f^{\dagger_1} = \bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f) \\ \cup_{s \in \mu} o(s \restriction \sharp_1 A) \in \mathrm{St}(A)}} \bigodot_{\sharp_1 B} \mathrm{plg}_{\sharp_1 B}(\mu).$$

□

Proposition 5.26. *L'adjonction* $(\dagger_1, U, \mathrm{der}, \eta)$ *est monoïdale.*

Démonstration. On équipe le foncteur $\dagger_1$ des deux transformations naturelles $p = \mathrm{TnAv}$ et $u = \mathrm{UnnTop}$ et on équipe le foncteur U des deux transformations naturelles $p' = \mathrm{AvTn} \mathbin{;} \mathrm{der} \odot \mathrm{der}$ et $u = \mathrm{TopUnn}$. On vérifie facilement qu'on obtient ainsi deux foncteurs monoïdaux.

Pour vérifier la monoïdalité η il faut essentiellement vérifier la commutation dans K des diagrammes suivants.

$$\begin{tikzcd}
 & U\dagger_1 A \,\&\, U\dagger_1 B \arrow[d, Rightarrow, "p'_{\dagger_1 A, \dagger_1 B}"] \\
A \,\&\, B \arrow[ur, Rightarrow, "\eta_A \& \eta_B"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta_{A\&B}"'] & U(\dagger_1 A \odot \dagger_1 B) \arrow[d, Rightarrow, "Up_{A,B}"] \\
 & U\dagger_1(A \,\&\, B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \int \arrow[d, Rightarrow, "u'"] \\
\int \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{id}_\int"] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta_\int"'] & U\int \arrow[d, Rightarrow, "Uu"] \\
 & U\dagger_1 \int.
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes se ramènent à des diagrammes dans $\mathbf{JNA}$ qui sont trivialement commutatifs.

Pour vérifier la monoïdalité de η il faut essentiellement vérifier la commutations des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\dagger_1 UA \odot \dagger_1 UB \arrow[d, "p_{UA,UB}"'] \arrow[dr, "\mathrm{der}_A \odot \mathrm{der}_B"] & \\
\dagger_1(UA \,\&\, UB) \arrow[d, "{p'_{A,B}}^{\dagger_1}"'] & A \odot B \\
\dagger_1 U(A \odot B) \arrow[ur, "\mathrm{der}_{A\odot B}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int \arrow[d, "\mathrm{UnnTop}"'] \arrow[dr, "I_\int"] & \\
\dagger_1(\int). \arrow[d, "{u'}^{\dagger_1}"'] & \int \\
\dagger_1 U\int \arrow[ur, "\mathrm{der}_\int"'] &
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes sont équivalents aux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\sharp_1 A \odot \sharp_1 B \arrow[d, "\mathrm{TnAv}_{A,B}"'] \arrow[dr, "\mathrm{der}_A \odot \mathrm{der}_B"] & \\
\sharp_1(A \,\&\, B) \arrow[d, "(\mathrm{AvTn}_{A,B} ; \mathrm{der}_A \odot \mathrm{der}_B)^{\dagger_1}"'] & A \odot B \\
\sharp_1(A \odot B) \arrow[ur, "\mathrm{der}_{A\odot B}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int \arrow[d, "\mathrm{UnnTop}"'] \arrow[dr, "I_\int"] & \\
\sharp_1 \int. \arrow[d, "(\mathrm{TopUnn})^{\dagger_1}"'] & \int \\
\sharp_1 \int \arrow[ur, "\mathrm{der}_\int"'] &
\end{tikzcd}$$

La commutation du premier diagramme est triviale car

$$(\mathrm{AvTn}_{A,B} \mathbin{⨾} \mathrm{der}_A \odot \mathrm{der}_A)^{\dagger_1} \mathbin{⨾} \mathrm{der}_{A \odot B} = \mathrm{AvTn}_{A,B} \mathbin{⨾} \mathrm{der}_A \odot \mathrm{der}_B$$

Et la commutation du second diagramme est elle aussi triviale. □

Remarque 5.27. L'exponentielle $\sharp_1$ ne permet pas d'étendre à LL*pol* les résultats de réversibilité de la section 4.2.2.

Deuxième partie

Simple et multiple

CHAPITRE 6

Uniformité et lieux de l'interaction en sémantique statique

Les sémantiques cohérentes et hypercohérentes de la logique linéaire donnent une interprétation dite *uniforme* des exponentielles. Nous revenons plus loin sur le sens de cette terminologie. Cette uniformité se traduit concrétement par le fait que la sémantique d'une formule $!X$ est construite en utilisant fortement la sémantique des preuves de X. Plus précisément, la trame de l'espace $!X$ pour la sémantique cohérente comme pour la sémantique hypercohérente est l'ensemble des cliques finies de X, c'est à dire du point de vue sémantique, l'ensemble des *preuves finies* de X.

L'interprétation des exponentielles dans la sémantique de jeux construite au chapitre précédent est, elle aussi, uniforme : les parties dans $\downarrow \sharp_1 A$ sont des entrelacements de parties appartenant à une même stratégie de A. La encore, du point de vue sémantique, la formule $\downarrow \sharp_1 A$ est formées de *preuves finies* de A.

Cette uniformité complique la comparaison entre la sémantique hypercohérente et la sémantique des jeux. En effet, du fait de l'uniformité, pour établir une relation entre ces deux sémantiques au niveau des formules, il faudrait établir une relation pour les notions d'agents finis entre ces deux sémantiques. Ceci suppose de traiter dans un même mouvement les preuves et les formules.

En sortant du cadre imbriqué de l'uniformité, la comparaison pourra être faite en deux étapes. Dans une première étape en travaillant au niveau des formules sans se soucier de comparer cliques et stratégies et dans un seconde étape en passant à l'interprétation des preuves.

La sémantique des jeux ne manque pas de travaux mettant en œuvre des exponentielles non-uniformes, essentiellement l'exponentielle à la AJM et l'exponentielle HO. Cela dit l'exponentielle présentée au chapitre 5 est uniforme. Aussi, nous discutons au chapitre 7, les possibilités d'adaptation d'une exponentielle non-uniforme à notre cadre de jeux à bords.

Par contre il y avait peu ou pas de travaux concernant des sémantiques statiques utilisant des exponentielles non-uniformes. À deux exceptions près. D'une part, la sémantique relationnelle peut être considéré comme donnant une interprétation non-uniforme aux exponentielles. D'autre part, dans [BE01], A. Bucciarelli et T. Ehrhard donnent un procédé traduisant des modèles de la prouvabilité d'une logique linéaire indexée en des modèles dénotationnels non-uniforme de la logique linéaire. Plus précisément tout modèle de phase de cette logique linéaire indexée satisfaisant certaines conditions définit une sémantique dénotationnelle de la logique linéaire qui est la sémantique relationnelle enrichie par des relations de cohérences à valeurs dans les faits du modèle de phases. Dans sa thèse, A. Bruasse-Bac a étendu ce procédé au second ordre et, en utilisant le procédé de Bucciarelli-Ehrhard, elle a par ailleurs développé un modèle non-uniforme, à quatre valeurs de cohérence, permettant de rejeter la règle *Mix*.

Dans la suite, les sémantiques statiques non-uniformes que nous considérerons seront toutes construites par enrichissement de la sémantique relationnelle par des valeurs de cohérence et, plus précisément, il y aura un foncteur d'oubli de la catégorie du modèle dans la catégorie des relations qui laissera l'interprétation des preuves à l'identique. Ceci fournit une certaine modularité puisque de cette manière les différentes sémantique non-uniformes peuvent être combinées. En effet, pour chaque sémantique non-uniforme, l'interprétration des preuves coincidera avec celle du modèle relationnel, mais une telle sémantique discriminera mieux les relations ne venant pas d'une preuve en introduisant des critères de validatition plus fins (typiquement le fait d'être une clique dans une sémantique non-uniforme à la espaces de cohérence). La conjonction de ces critères pour différentes sémantiques non-uniforme raffinera ainsi le modèle relationnel.

En général, il n'y a pas de définition officielle pour la terminologie uniforme/non-uniforme, seulement des intuitions. Dans l'introduction de cette thèse nous avons succinctement présenté l'uniformité comme un cadre dans lequel « les agents n'anticipent leurs arguments que comme produit par d'autres agents ». Considérons un programme P utilisant un argument b. Dans notre approche du Calcul, la valeur de l'argument b sera fournie par un autre programme P'. Intuitivement, dans un cadre uniforme, l'interprétation de P en tiendra compte, par exemple en prenant acte du fait que b est produit de manière déterministe : dans un même contexte d'exécution, l'argument b prendra toujours la même valeur. Ainsi, si le programme P appelle plusieurs fois l'argument b, la sémantique de P peut anticiper sur le fait que b prendra la même valeur à chacun de ces appels.

Par exemple, dans une sémantique uniforme, l'interprétation du terme

$$P = \lambda b.\, \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ t_1\ \mathtt{else}\ t_2)\ \mathtt{else}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ t_3\ \mathtt{else}\ t_4)$$

ne contient aucune information sur t_2 et t_3, tandis que dans une sémantique non-uniforme ces deux sous-termes sont représentés dans l'interprétation du terme. Supposons, par exemple, que t_1, t_2, t_3 et t_4 sont du type des booléens. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, on note $t_i^\bullet$ l'interprétation de t_i dans la sémantique statique considérée (ainsi dans ce qui suit $t_i^\bullet \in \{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$). La sémantique cohérente ou hypercohérente du terme P est :

$$P^\bullet = \{(\{\mathtt{v}\}, t_1^\bullet), (\{\mathtt{f}\}, t_4^\bullet)\}$$

pour la version ensembliste et

$$P^\bullet = \{([\mathtt{v}, \mathtt{v}], t_1^\bullet), ([\mathtt{f}, \mathtt{f}], t_4^\bullet)\}$$

pour la version multi-ensembliste. La sémantique relationnelle du terme P est

$$P^\bullet = \{([\mathtt{v}, \mathtt{v}], {t_1}^\bullet), ([\mathtt{v}, \mathtt{f}], {t_2}^\bullet), ([\mathtt{v}, \mathtt{f}], {t_3}^\bullet), ([\mathtt{f}, \mathtt{f}], {t_4}^\bullet)\}.$$

Le fait que t_2 et t_3 ne sont pas représentés dans les sémantiques cohérentes et hypercohérentes n'a pas d'incidence sur la correction de ces modèles puisque le résultat de l'évaluation de P sur un argument booléen ne sera jamais t_2 ou t_3. En fait le terme P a beau être syntaxiquement correct, il n'en contient pas moins un portion de code totalement inutile, *à moins* que l'environnement ne se comporte de manière non-déterministe en changeant la valeur de l'argument en cours d'évaluation (on pourra par exemple penser à du parallèlisme dans un cadre de mémoire partagé ou aux instructions d'affectation d'un langage de programmation impératifs). Dans ce cas l'exécution déclencherait effectivement la continuation t_2 ou la continuation t_3. Un tel environnement serait alors *non-uniforme* dans sa manière de fournir la valeur de b et par analogie, T. Ehrhard a introduit cette terminologie pour une sémantique prévoyant qu'un argument booléen puisse changer de valeur, comme, ici, la sémantique relationnelle.

Il en va de même pour les preuves : dans une interprétation uniforme, certaines sous-preuves sont *oubliées*. Ainsi dans l'exemple de la figure 6.1, la sémantique cohérente multi-ensembliste *oublie* les deux branches intérieures de la preuve. Dans cet exemple l'interprétation des preuves est construite par décoration des séquents, $(1, *)$ est noté $\mathtt{v}$, $(2, *)$ est noté $\mathtt{f}$ et les points

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash\bot,1:\{(*,*)\}}\quad\dfrac{}{\vdash\bot,1:\{\cancel{(*,*)}\}}}{\vdash\bot\mathbin{\&}\bot,1:\{(\mathtt{v},*),\cancel{(\mathtt{f},*)}\}}}{\vdash\bot\mathbin{\&}\bot,1,\bot:\{(\mathtt{v},*,*),\cancel{(\mathtt{f},*,*)}\}}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash\bot,1:\{\cancel{(*,*)}\}}\quad\dfrac{}{\vdash\bot,1:\{(*,*)\}}}{\vdash\bot\mathbin{\&}\bot,1:\{\cancel{(\mathtt{v},*)},(\mathtt{f},*)\}}}{\vdash\bot\mathbin{\&}\bot,1,\bot:\{\cancel{(\mathtt{v},*,*)},(\mathtt{f},*,*)\}}}{\vdash\bot\mathbin{\&}\bot,1,\bot\mathbin{\&}\bot:\{(\mathtt{v},*,\mathtt{v}),\cancel{(\mathtt{f},*,\mathtt{v})},\cancel{(\mathtt{v},*,\mathtt{f})},(\mathtt{f},*,\mathtt{f})\}}\;(\mathit{avec})}{\vdash?(\bot\mathbin{\&}\bot),1,\bot\mathbin{\&}\bot:\{([\mathtt{v}],*,\mathtt{v}),\cancel{([\mathtt{f}],*,\mathtt{v})},\cancel{([\mathtt{v}],*,\mathtt{f})},([\mathtt{f}],*,\mathtt{f})\}}\;(\mathit{der.})}{\vdash?(\bot\mathbin{\&}\bot),1,?(\bot\mathbin{\&}\bot):\{([\mathtt{v}],*,[\mathtt{v}]),\cancel{([\mathtt{f}],*,[\mathtt{v}])},\cancel{([\mathtt{v}],*,[\mathtt{f}])},([\mathtt{f}],*,[\mathtt{f}])\}}\;(\mathit{der.})}{\vdash?(\bot\mathbin{\&}\bot),1:\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],*),\cancel{([\mathtt{f},\mathtt{v}],*)},([\mathtt{f},\mathtt{f}],*)\}}\;(\mathit{cont.})
$$

FIG. 6.1 – Exemple d'interprétation uniforme d'une preuve

présents dans l'interprétation relationnelle mais oubliés dans l'interprétation cohérente (multi-ensembliste) ont été barrés.

À nouveau, quel que soit la preuve contre laquelle celle-ci sera coupée, ces deux branches ne seront pas visitées par la procédure d'élimination des coupures.

Ainsi l'uniformité est aussi une restriction de l'interprétation aux seules *interactions internes possibles*. Nous développerons ce point de vue dans ce chapitre.

Nous nous intéresserons tout particulièrement à trois manières de parler de la modélisation des interactions internes du Calcul.

La première, est de construire un modèle dénotationnel dans lequel on puisse détailler la coupure comme une somme d'interactions atomiques. Cette idée est au centre du programme de la géométrie de l'interaction, où l'élimination des coupures est représentée par des chemins. On la retrouve aussi dans la sémantique des jeux, par exemple avec la notion de coupure atomique (définition 4.17).

La deuxième est de considérer la relation d'équivalence partielle d'extensionnalité dans une sémantique du λ-calcul simplement typé (ou de PCF). Rappelons que, pour cette relation, deux agents fonctionnels sont équivalents s'ils fournissent des résultats équivalents sur des données équivalentes. Autrement dit deux agents fonctionnels sont équivalents si les résultats de leurs interactions avec des données équivalentes sont équivalents. Le collapse extensionnel (le quotient du modèle par cette relation) peut ainsi être considéré comme la trace d'un certain contenu interactif du modèle. Ainsi deux modèles peuvent être considérés comme interactivement équivalents lorsqu'ils définissent le même collapse extensionnel.

La troisième est une version de la première dans le cas clos. Elle entre dans le cadre de ce que J.-Y. Girard appelle la *dualité moniste*. Essentiellement, il s'agit de considérer la coupure entre un agent π de type A et un agent de type $A^{\perp}$. La *trace* de l'élimination de cette coupure est ce qu'on appelle une rencontre. En prenant tous les agents de type $A^{\perp}$, on obtient alors une représentation de l'agent π comme l'ensemble des rencontres obtenues.

Du point de vue de la consistance, il est naturellement impossible d'avoir à la fois une preuve de A et une preuve de $A^{\perp}$. L'idée essentielle introduite par J.-Y. Girard est alors d'enrichir la syntaxe avec des nouvelles règles, appelées *para-règles*, qui rendent le système inconsistant et fournissent ainsi à la fois des preuves de A et de $A^{\perp}$. Il faut bien entendu être capable d'étendre l'élimination des coupures à ce nouveau système de manière à avoir encore la normalisation forte. La rencontre entre une preuve de A et une preuve de $A^{\perp}$ est alors définie comme l'ensemble des étapes de l'élimination des coupures entre ces deux preuves. Ce point de vue a été poussé très loin par J.-Y. Girard avec l'introduction de la Ludique [Gir01].

Nous adoptons ici l'idée de l'introduction des para-règles, au niveau de la logique linéaire. Et nous considérons la notion de rencontre d'un point de vue sémantique. Nous demanderons donc en plus que la sémantique de la logique linéaire considérée s'étende en un modèle dénotationnel du système avec para-règles.

Les para-règles par excellence sont *le démon* (ou *abandon*) et *la divergence*.

$$
\dfrac{}{\vdash}\;(\textit{démon}) \qquad\qquad \dfrac{}{\vdash\Gamma.}\;(\textit{abandon})
$$

la règle *divergence* coïncide clairement avec la règle de même nom dans la Ludique. Au prime abord, il n'en va pas tout à fait de même de la règle *démon*. En fait la Ludique donne une présentation affine du calcul, ce qui correspondrait, dans la logique linéaire, à généraliser la règle d'affaiblissement à toutes les formules. À cette *affinicité* près, la règle *démon* présentée ici correspond bien à celle de la Ludique.

L'introduction de ces para-règles dans la sémantique relationnelle demande une petite adaptation. En effet le séquent vide est maintenant prouvable et son unique preuve sans coupure est

$$\frac{}{\vdash}\, R$$

où la règle *R* est soit une instance de la règle *divergence* soit une instance de la règle *démon*. Mais la seule façon de parler d'un séquent dans le modèle relationnel est de considérer le *par* généralisé de toutes les occurrences de formules qui apparaissent dans ce séquent et ainsi le séquent vide est considéré par le modèle comme contenant l'unité $\perp$ du *par*. L'interprétation de la règle *démon* dans le modèle relationnel est alors le singleton contenant l'unique point de $\perp$. Ce singleton est l'élément neutre du produit Cartésien des ensembles.

L'interprétation de la règle *divergence* est l'ensemble vide, ce qui donne en particulier que l'interprétation de la preuve du séquent vide par une règle *divergence* est vide.

Finalement, du point de vue du modèle catégorique, les deux preuves du séquent vide sont soit le morphisme à un point de 1 dans $\perp$ soit le morphisme vide de 1 dans $\perp$.

L'extension de la preuve de correction du modèle relationnel de la logique linéaire au modèle relationnel de LL +*démon*+*divergence* est immédiate.

Il y a d'autres para-règles qui sont en fait parfois considérées comme des règles à part entière car elles ne suffisent pas à rendre le système inconsistant. Il s'agit par exemple de de la règle *Mix*, que nous donnons ici annotée par son interprétation relationnelle :

$$\frac{\vdash \Gamma : f \qquad \vdash \Delta : g}{\vdash \Gamma, \Delta : f \times g.}\,(mix)$$

Dans la Ludique, la rencontre munit les agents (les *desseins*) d'une notion d'orthogonalité. Une preuve de $\vdash A$ et une preuve de $\vdash A^{\perp}$ sont dites orthogonales si leur coupure se normalise en une règle *démon*. On dit alors que la rencontre converge. L'autre possibilité est que la coupure se normalise en une instance de la règle *divergence* et on dit alors que la rencontre diverge.

Dans le cadre de la logique linéaire étendue par les para-règles considérés dans ce chapitre, on peut faire la remarque suivante.

Remarque 6.1. Pour toute formule A, pour toute preuve π de $\vdash A$ et pour toute preuve π' de $\vdash A^{\perp}$, la preuve du séquent vide obtenue par coupure de π et de π' se normalise en une instance de la règle *démon* (resp. en une instance de la règle *divergence*) ssi $[\pi]_{\mathrm{R}} \cap [\pi']_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$ (resp. $[\pi]_{\mathrm{R}} \cap [\pi']_{\mathrm{R}} = \emptyset$).

Démonstration. Soit π'' la preuve du séquent vide obtenue par coupure de π et de π'. Comme

$$[\pi'']_{\mathrm{R}} = [\pi']_{\mathrm{R}} \fatsemi [\pi]_{\mathrm{R}} = \{*_{\perp} \mid a \in [\pi]_{\mathrm{R}} \text{ et } (*_{\perp}, a) \in [\pi']_{\mathrm{R}}\},$$

l'ensemble $[\pi'']_{\mathrm{R}}$ contient un point ssi $[\pi]_{\mathrm{R}} \cap [\pi']_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$. Or, par correction, π'' se normalise en une instance de la règle *démon* ssi $[\pi'']_{\mathrm{R}} = \{*_{\perp}\}$ et π'' se normalise en une instance de la règle *divergence* ssi $[\pi'']_{\mathrm{R}} = \emptyset$. ☐

Nous utiliserons ici les para-règles uniquement dans le but de développer le point de vue que l'uniformité sémantique des exponentielles correspond précisément à une restriction du modèle aux seules interactions possibles. Ce point de vue est motivé par la découverte d'un certain nombre de sémantiques statiques admettant chacune une version uniforme et une version non-uniforme, que nous présentons. Pour chacune de ces sémantiques nous montrons que la version uniforme et la version non-uniforme définissent le même collapse extensionnel, ce qui nous permet d'affirmer que ces deux versions sont *interactivement équivalentes*.

La version non-uniforme de l'une de ces sémantiques fournit un résultat (le corollaire 6.24) précisant la remarque 6.1 : les interprétations relationnelles d'une preuve de $\vdash A$ et d'une preuve de $\vdash A^\perp$ s'intersectent en au plus un point. Nous ne connaissons pas de preuve directe de ce résultat. Nous l'interprétons comme une contrepartie sémantique du déterminisme de l'élimination des coupures.

6.1 Espace de P-cohérence

Nous introduisons la notion d'espace de P-cohérence qui fournit un cadre général pour les différentes notions d'espace que nous considérerons.

Une *puissance* est simplement un endofoncteur de la catégorie **Ens**, des ensembles et des inclusions. Les puissances que nous considérerons sont :

– la puissance vide P, définie par $P(E) = \emptyset$. Cette puissance sera simplement notée $\emptyset$;
– la puissance identité $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$ pour laquelle $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}(E) = E$ (nous utiliserons cette puissance pour le modèle relationnel bipartite) ;
– la puissance $\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}$ qui associe à un ensemble l'ensemble de ses sous-ensembles finis non vides. Cette puissance sera utilisée pour les hypercohérences ;
– lorsque K est un sous-ensemble de $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, la puissance $\mathcal{M}_K$ associe à chaque ensemble E l'ensemble des multi-ensembles finis d'éléments de E dont la cardinalité est un élément de K (la puissance $\mathcal{M}_{\{2\}}$ sera utilisée pour les espaces de cohérence). Cette puissance sera utilisée pour construire des espaces de cohérence non-uniformes comme suggéré à la fin de [BE01].

Définition 6.2. Soit P une puissance. Un *espace de P-cohérence* X est la donnée d'un triplet $(|X|, \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X, \asymp_X)$ où $|X|$ est un ensemble au plus dénombrable (la *trame* de X), et où $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X, \asymp_X$ est un recouvrement de $P(|X|)$, c'est à dire, où $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X, \asymp_X \subseteq P(|X|)$ avec $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X \cup \asymp_X = P(|X|)$. L'ensemble $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$ est appelé *cohérence* de l'espace et l'ensemble $\asymp_X$ est appelé *incohérence*. L'intersection de $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$ et $\asymp_X$ est appelée *neutralité* (notation : N_X).

La cohérence stricte $\frown_X$ de X est le complémentaire de l'incohérence $\asymp_X$ de X dans l'ensemble $P(|X|)$ et l'incohérence stricte $\smile_X$ est le complémentaire de la cohérence $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$.

Définition 6.3 (espace réflexif). Un espace de P-cohérence X est réflexif si la neutralité correspond à l'égalité au sens suivant : pour tout $x \subseteq |X|$, on a $P(x) \subseteq \mathsf{N}_X$ ssi x est un singleton. Cette propriété est satisfaite dans les sémantiques cohérentes et hypercohérentes usuelles.

La donnée de deux ensembles parmi $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$, $\asymp_X$, N_X, $\frown_X$ et $\smile_X$ définit un espace de P-cohérence, sous certaines contraintes évidentes (par exemple, ces deux ensembles ne doivent pas être l'un la cohérence et l'autre l'incohérence stricte et on doit avoir $\mathsf{N}_X \subseteq \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$, $\smile_X \cap \frown_X = \emptyset$, etc.). La donnée d'un seul ensemble parmi $\mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$, $\asymp_X$, $\frown_X$ et $\smile_X$ définit un espace de P-cohérence réflexif sous des contraintes évidentes (par exemple $\cup_{a\in|X|} P(\{a\}) \subseteq \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$).

Définition 6.4 (orthogonal). Soit X est un espace de P-cohérence. L'orthogonal de X, noté $X^\perp$ est l'espace de P-cohérence $X^\perp = (|X|, \asymp_X, \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X)$.

Définition 6.5 (clique). Soit X un espace de P-cohérence. Une *clique* de X est un sous-ensemble x de $|X|$ saturé pour la relation de cohérence, c'est-à-dire tel que $P(x) \subseteq \mathrel{\overset{\frown}{\smile}}_X$. On note $\mathrm{Cl}(X)$ l'ensemble des cliques de X. On appelle *anti-cliques* de X les cliques de $X^\perp$.

Définition 6.6 (déterminisme). Un espace de P-cohérence X est *déterministe* lorsque pour tout $x \subseteq |X|$, si $P(x) \subseteq \mathsf{N}_X$ alors x est un singleton.

Un espace de P-cohérence X réflexif est donc déterministe. La terminologie vient du fait qu'un espace de P-cohérence X est déterministe ssi toute clique de X intersecte toute anti-clique de X en au plus un point. Autrement dit, dans un sémantique de P-cohérence déterministe (c'est à dire où toutes les formules sont interprétées par des espaces de P-cohérence déterministes et où les preuves sont interprétées par des cliques) la rencontre d'une preuve de A et d'une preuve de $A^\perp$ détermine un unique point (lorsqu'elle n'est pas vide). Ainsi ce déterminisme est celui de l'élimination de coupures (dans le cas clos).

6.2 Uniformité destructive, le modèle relationnel bipartite

Dans cette section nous montrons un exemple simple de sémantique admettant une version uniforme et une version non-uniforme. Le modèle non-uniforme est obtenu par décoration du modèle relationnel avec des polarités, selon une remarque connue. Nous montrons que ce modèle admet en fait une variante uniforme de l'interprétation des exponentielles. Le *contenu interactif* de cette sémantique est très particulier puisque la rencontre de l'interprétation d'une preuve de $\vdash A$ et de l'interprétation d'une preuve de $\vdash A^\perp$ est toujours vide. Nous montrons aussi que le modèle uniforme et le modèle non-uniforme définissent le même collapse extensionnel, autrement dit, que ces deux modèles ont le même *contenu interactif* au sens de l'extensionnalité. Cette sémantique illustre aussi, et surtout, un cas extrême d'effacement d'information du à l'uniformité, puisque toute preuve de $\vdash ?A$ est d'interprétation vide dans le modèle uniforme.

Une remarque intéressante à propos du modèle relationnel de la logique linéaire est qu'il est possible d'équiper tous les points des ensembles d'une polarité *positif/négatif* et d'obtenir ainsi un modèle, que nous appelons modèle relationnel bipartite, qui a la propriété que l'interprétation de toute preuve ne contient que des points positifs. Cela se fait de la manière suivante. Chaque objet E du modèle est désormais donnée par une partition de l'ensemble associé à E, noté $|E|$ et appelé trame de E, en deux ensembles $|E|^+$, la trame positive, et $|E|^-$, la trame négative. Un objet du modèle relationnel bipartite est donc un espace de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence $(|E|, |E|^+, |E|^-)$ où la neutralité est vide. L'interprétation des formules est la suivante. Pour E et F des espaces de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence :

- les constantes additives 0 et $\top$ sont données par l'unique bipartition de l'ensemble vide, *i.e.* $0 = \top = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$;
- la constante multiplicative 1 est l'espace singleton de trame négative vide, $1 = (\{*\}, \{*\}, \emptyset)$;
- la constante multiplicative $\perp$ est l'espace singleton de trame positive vide, $\perp = (\{*\}, \emptyset, \{*\})$;
- la négation linéaire est, comme dans le cas général des espaces de P-cohérence, l'échange de la cohérence et de l'incohérence, c'est à dire que $E^\perp = (|E|, |E|^-, |E|^+)$.
- Le *avec* de E et F est l'espace $E \,\&\, F = (|E| + |F|, |E|^+ + |F|^+, |E|^- + |F|^-)$ et le *plus* de E et F est l'espace $(E^\perp \,\&\, F^\perp)^\perp$ qui est aussi égal à $E \,\&\, F$.
- Le tenseur de E et F, $E \otimes F$, est l'espace de trame $|E| \times |F|$ et de cohérence $|E \times F|^+$ égale à $|E|^+ \times |F|^+$ (son incohérence est alors le complémentaire de sa cohérence dans $|E| \times |F|$). Le *par* de E et F est l'espace $E \parr F = (E^\perp \otimes F^\perp)^\perp$. La flèche linéaire est donnée par $E \multimap F = E^\perp \parr F$. On a ainsi $|E \multimap F| = |E| \times |F|$ et $(a, b) \in |E \multimap F|^+$ ssi $a \in |E|^+$ implique $b \in |F|^+$.
- Le *bien sûr* de E, $!E$ est l'espace de trame $\mathcal{M}_{\text{fin}}|E|$ et dont la cohérence est égale à $\mathcal{M}_{\text{fin}}|E|^+$. Ainsi, un élément de $|!E|$ est incohérent ssi il contient au moins un point incohérent de E. Le *pourquoi pas* de E, $?E$ est l'espace $(!E^\perp)^\perp$. Ainsi un point de $|?E|$ est cohérent ssi il contient au moins un point cohérent de E.

Remarque 6.7. Contrairement à la sémantique relationnelle dont elle est issue, cette sémantique distingue A et $A^\perp$. En particulier les constantes multiplicatives, 1 et $\perp$, sont distinctes.

On note $[A]_{\text{RB}}$ l'espace de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence interprétant une formule A. On a clairement $|\,[A]_{\text{RB}}\,| = [A]_{\text{R}}$. L'interprétation $[\pi]_{\text{RB}}$ d'une preuve π est définie comme dans le modèle relationnel, autrement dit on a $[\pi]_{\text{RB}} = [\pi]_{\text{R}}$. Ceci donne bien un modèle de la logique linéaire (qui peut être considéré comme une simple décoration du modèle relationnel standard). Et, en raisonnant par cas sur les règles et leurs interprétations, données dans la table 2.0.4, on vérifie facilement que toute preuve d'un séquent $\vdash A_1, \ldots, A_n$ est interprétée par un sous-ensemble de $|\,[A_1 \parr \ldots \parr A_n]_{\mathrm{RB}}\,|^+$, c'est à dire par une clique de l'espace de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence $[A_1 \parr \ldots \parr A_n]_{\mathrm{RB}}$.

Ce modèle s'étend en un modèle de la logique linéaire auquel on a ajouté les para-règles *divergence* et *Mix* et pour lequel on a encore la propriété que toute preuve est interprété par un ensemble de points positifs. L'ajout de la para-règle *démon* ne préserverait pas cette propriété.

Si E et F sont des espaces de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence bipartites, un morphisme de $\mathbf{Rel}(|E|,|F|)$ n'est pas forcément une clique de l'espace de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence $E \multimap F$. Mais on peut donner un cadre catégorique au modèle relationnel bipartite pour lequel les morphismes de E dans F seront exactement les cliques de $E \multimap F$.

Les objets de la catégorie relationnelle bipartite, appelés espaces bipartites, sont les espaces de $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$-cohérence dont la neutralité est vide. Les morphismes de E dans F sont les cliques de $E \multimap F$, c'est à dire les sous-ensembles de $|E \multimap F|^+$. La composition est la composition des relations et l'identité de E dans E est la relation identité sur $|E|$, c'est à dire l'ensemble $\{(a,a) \mid a \in |E|\}$. On vérifie facilement que ceci est bien une catégorie et que la structure de modèle de LL de la catégorie des relations s'adapte bien à cette catégorie. En particulier, la structure de comonade $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ du *bien sûr* est celle du modèle relationnel. On note $\mathbf{Bip}$ la catégorie des espaces bipartites.

Les espaces bipartites sont des espaces de P-cohérence déterministes en un sens dégénéré : une clique et une anti-clique ne s'intersectent jamais. Ceci coïncide avec la remarque 6.1 dans le cas où la rencontre entre une preuve et une contre-preuve diverge toujours (*i.e.* se normalise toujours en une *divergence*).

6.2.1 Le modèle bipartite uniforme

Dans ce cadre catégorique, nous pouvons donner une interprétation uniforme aux exponentielles. La structure des exponentielles uniformes est donnée par une comonade $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u, \mathrm{dig}_u)$ que nous allons décrire. Les autres constructions catégoriques du modèle relationnel bipartite uniforme sont inchangées.

Le *bien sûr*, noté $\underset{u}{!}$, est défini sur les objets par $|\underset{u}{!}\,E| = |\underset{u}{!}\,E|^+ = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}|E|^+$. Il s'agit bien d'une interprétation uniforme au sens donné au début de ce chapitre puisque la trame de l'espace bipartite interprétant $!A$ ne contient que des (multi-ensembles à support des) interprétations finies de preuves de A. Par contre, l'interprétation dans le modèle bipartite uniforme du terme

$$P = \lambda b.\,\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ t_1\ \mathtt{else}\ t_2)\ \mathtt{else}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ t_3\ \mathtt{else}\ t_4)$$

pour t_1, t_2, t_3 et t_4 de type **bool** $= 1 \oplus 1$, sera égale à l'interprétation relationnelle de ce terme.

Le *bien sûr* est défini sur les morphismes en posant

$$\underset{u}{!}\,f = \{([a_i \mid i \in I],[b_i \mid i \in I]) \mid [(a_i,b_i) \mid i \in I] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(f \cap (|E|^+ \times |F|^+))\}$$

pour toute clique f de $X \multimap Y$. Il est clair que $\underset{u}{!}\,f$ est une clique de $\underset{u}{!}\,E \multimap \underset{u}{!}\,F$ et que $\underset{u}{!}\,\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{\underset{u}{!}\,E}$. Pour montrer que $\underset{u}{!}$ est bien un foncteur il reste à montrer que cette construction $\underset{u}{!}$ sur les morphismes commute à la composition. Soient deux morphismes $f : E \to F$ et $g : F \to G$ de $\mathbf{Bip}$. Vérifions que $\underset{u}{!}(f \mathbin{;} g) = \underset{u}{!}\,f \mathbin{;} \underset{u}{!}\,g$.

On montre que $\underset{u}{!}\,f \mathbin{;} \underset{u}{!}\,g \subseteq \underset{u}{!}(f \mathbin{;} g)$. Supposons que $([a_i \mid i \in I],[c_k \mid k \in K]) \in \underset{u}{!}\,f \mathbin{;} \underset{u}{!}\,g$. Alors il existe un multi-ensemble $[b_j \mid j \in J] \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|F|)$ tel que $([a_i \mid i \in I],[b_j \mid j \in J])$ est un élément de $\underset{u}{!}\,f$ et $([b_j \mid j \in J],[c_k \mid k \in K])$ est un élément de $\underset{u}{!}\,g$. Donc il existe une bijection de $\sigma : I \to J$ telle que $\{(a_i, b_{\sigma(i)}) \mid i \in I\}$ est un multi-ensemble d'éléments de $f \cap (|E|^+ \times |F|^+)$ et il existe une bijection $\tau : J \to K$ telle que $[(b_{\sigma(i)}, c_{\tau(\sigma(i))}) \mid i \in I]$ est un multi-ensemble d'éléments de $g \cap (|F|^+ \times |G|^+)$. On a alors que $[(a_i, c_{\tau(\sigma(i))}) \mid i \in I]$ est un multi-ensemble d'éléments de $f \mathbin{;} g$ qui sont aussi des éléments de $|E|^+ \times |G|^+$. On en déduit que $([a_i \mid i \in I],[c_{\tau(\sigma(i))} \mid i \in I])$, où $[c_{\tau(\sigma(i))} \mid i \in I] = [c_k \mid k \in K]$, est bien un élément de $!(f \mathbin{;} g)$.

Réciproquement, supposons que $([a_i \mid i \in I], [c_i \mid i \in I])$ est un élément de $\underset{u}{!}(f \fatsemi g)$. Alors il existe une famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de F telle que, pour tout $i \in I$, $(a_i, b_i) \in f$ et $(b_i, c_i) \in g$. Par ailleurs, pour tout $i \in I$, $a_i \in |E|^+$ et $b_i \in |F|^+$. Comme f est un clique on en déduit que, pour chaque $i \in I$, $c_i \in |F|^+$. Donc $([a_i \mid i \in I], [b_i \mid i \in I]) \in \underset{u}{!} f$ et $([b_i \mid i \in I], [c_i \mid i \in I]) \in \underset{u}{!} g$ et finalement $([b_i \mid i \in I], [c_i \mid i \in I]) \in \underset{u}{!} f \fatsemi \underset{u}{!} g$. Ce qui conclut.

L'opération Pos définie par $\mathrm{Pos}(E) = (|E|^+, |E|^+, \emptyset)$ pour tout espace bipartite et sur les morphismes par $\mathrm{Pos}(f) = f \cap (|E|^+ \times |F|^+)$ est clairement un foncteur.

Remarque 6.8. Soient E et F des espaces bipartites et soit f un morphisme de E dans F. Alors $\underset{u}{!} E = \mathrm{Pos}\, \underset{u}{!} E = \underset{u}{!} \mathrm{Pos}\, E = \mathrm{Pos} ! E = ! \mathrm{Pos}\, E$ et $\underset{u}{!} f = \mathrm{Pos}\, \underset{u}{!} f = \underset{u}{!} \mathrm{Pos}\, f = \mathrm{Pos} ! f = ! \mathrm{Pos}\, f$ (où ! est le foncteur *bien sûr* du modèle relationnel bipartite).

La transformation naturelle $\mathrm{der}_u : \underset{u}{!} \dot{\to} \mathrm{id}$ est donnée par $\mathrm{der}_{u,E} = \{([a], a) \mid a \in |E|^+\}$. On a donc $\mathrm{Pos}\, \mathrm{der}_E = \mathrm{der}_{\mathrm{Pos}\, E}$ où der est la transformation naturelle déréliction du modèle relationnel bipartite. On vérifie que pour chaque clique f de $E \multimap F$ on a

$$\mathrm{der}_{u,E} \fatsemi f = \underset{u}{!} f \fatsemi \mathrm{der}_{u,F} .$$

Si $([a], b)$ est un élément de $\underset{u}{!} \fatsemi \mathrm{der}_{u,F}$ alors $(a, b) \in f$ et $[a] \in |\underset{u}{!} E|$ donc $a \in |E|^+$, $([a], a) \in \mathrm{der}_E$ et finalement $([a], b)$ est bien un élément de $\mathrm{der}_{u,E} \fatsemi f$. Réciproquement, si $([a], b)$ est un élément de $\mathrm{der}_{u,E} \fatsemi f$, alors $(a, b) \in f$ et $a \in |E|^+$ donc, comme f est une clique, $b \in |F|^+$, d'où $([a], [b]) \in \underset{u}{!} f$ et $([b], b) \in \mathrm{der}_{u,F}$, et finalement $([a], b)$ est bien un élément de $\underset{u}{!} f \fatsemi \mathrm{der}_{u,F}$.

La transformation naturelle $\mathrm{dig}_u : \underset{u}{!} \dot{\to} \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}$ est donnée par

$$\mathrm{dig}_{u,E} = \{(\sum_{i \in I} x_i, [x_i \mid i \in I]) \mid \sharp I \in \mathbb{N}, x_i \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|E|^+)\}.$$

On a alors $\mathrm{dig}_{u,E} = \mathrm{Pos}\, \mathrm{dig}_E = \mathrm{dig}_{\mathrm{Pos}\, E}$ où dig est le morphisme d'excavation du modèle relationnel bipartite. La naturalité de dig_u est alors une conséquence directe de la naturalité de dig, en utilisant la remarque 6.8.

Par la remarque 6.8, la commutation des trois diagrammes

$$\begin{tikzcd} \underset{u}{!} E \arrow[r, "\mathrm{dig}_E"] \arrow[dr, "\underset{u}{!} I_E"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!} E \arrow[d, "\underset{u}{!} \mathrm{der}_{u,E}"] \\ & \underset{u}{!} E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underset{u}{!} E \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,E}"] \arrow[dr, "\underset{u}{!} I_E"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!} E \arrow[d, "\mathrm{der}_{u,\underset{u}{!} E}"] \\ & \underset{u}{!} E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underset{u}{!} E \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,E}"] \arrow[d, "\mathrm{dig}_{u,E}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!} E \arrow[d, "\underset{u}{!} \mathrm{dig}_{u,E}"] \\ \underset{u}{!}\,\underset{u}{!} E \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,\underset{u}{!} E}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}\,\underset{u}{!} E \end{tikzcd}$$

est une conséquence de la commutation des trois diagrammes correspondants dans $\mathbf{Rel}$.

Finalement, $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u, \mathrm{dig}_u)$ est bien une comonade dans $\mathbf{Bip}$.

Pour montrer que $\mathbf{Bip}$ équipée de cette comonade est un modèle la logique linéaire, il reste à montrer la monoïdalité de l'adjonction induite par cette comonade. Par les remarques 6.8 et 6.9, c'est une conséquence de la propriété correspondante dans $\mathbf{Rel}$.

Remarque 6.9. Soient E, E', F et F' des espaces bipartites et $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ des morphismes dans $\mathbf{Bip}$. Alors $\mathrm{Pos}(E \,\&\, F) = \mathrm{Pos}\, E \,\&\, \mathrm{Pos}\, F$, $\mathrm{Pos}(E \otimes F) = \mathrm{Pos}\, E \otimes \mathrm{Pos}\, F$, $\mathrm{Pos}(f \,\&\, g) = \mathrm{Pos}\, f \,\&\, \mathrm{Pos}\, g$ et $\mathrm{Pos}(f \otimes g) = \mathrm{Pos}\, f \otimes \mathrm{Pos}\, g$.

Nous avons donc deux modèles de la logique linéaire dans la catégorie des relations bipartites. Un modèle non-uniforme donné par la comonade $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ et un modèle uniforme donné par la comonade $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u, \mathrm{dig}_u)$.

Pour toute formule A, la trame positive de l'interprétation uniforme de $?A$ est vide. Comme l'interprétation uniforme d'une preuve de $\vdash ?A$ est un ensemble de points de la trame positive de l'interprétation uniforme de $?A$, on en déduit la remarque suivante.

Remarque 6.10. Pour toute formule A, l'interprétation de toute preuve de $\vdash ?A$ dans le modèle bipartite uniforme est l'ensemble vide.

Cette remarque montre que l'uniformité des exponentielles peut être éminemment destructive d'information. Le fait étonnant, au prime abord, était qu'il existe un modèle dénotationnel, c'est à dire dans lequel l'interprétation des preuves est stable par élimination des coupures, interprétant toutes les preuves de $\vdash ?A$ par le même ensemble, qui plus est l'ensemble vide, sans que toutes les preuves aient la même interprétation. La raison est, nous semble-t-il, à chercher dans le fait que ce modèle ne fait pas la place à suffisamment de para-règles pour tester interactivement les agents et ce faisant réclamer que ceux-ci aient un contenu. Autrement dit l'impossibilité de rajouter la para-règle *démon* a vidé la notion de rencontre entre agents de son contenu, libéralisant ainsi les contraintes de bonne sociabilité des agents en terme d'élimination des coupures.

Nous montrons maintenant que le modèle bipartite uniforme et le modèle bipartite non-uniforme définissent le même collapse extensionnel, ce qui, à notre avis et conformément à l'introduction de ce chapitre, montre que ces deux modèles ont un même contenu interactif.

Si f est un morphisme de $!E \to F$ dans $\mathbf{Bip}$ alors le morphisme $f^\dagger$ de $!E \to !F$ induit par la comonade $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ est égal à $\mathrm{dig}_E \,\mathbin{;}\, !f$ c'est à dire à

$$f^\dagger = \{(\sum_{i\in I} \mu_i, [b_i \mid i \in I]) \mid \sharp I \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in I, (\mu_i, b_i) \in f\}$$

Et, si f est un morphisme de $\underset{u}{!}\, E \to F$ dans $\mathbf{Bip}$ alors le morphisme $f^{\dagger_u}$ de $\underset{u}{!}\, E$ dans $\underset{u}{!}\, F$ induit par la comonade $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u, \mathrm{dig}_u)$ est égal à $\mathrm{dig}_{u,E} \,\mathbin{;}\, \underset{u}{!}\, f$ c'est à dire à

$$f^{\dagger_u} = \{(\sum_{i\in I} \mu_i, [b_i \mid i \in I]) \mid \sharp I \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in I, (\mu_i, b_i) \in f\}$$

car pour tout élément (μ, b) de f, μ est un élément de $|\underset{u}{!}\, E|$ donc de $|\underset{u}{!}\, E|^+$ et ainsi b est un élément de $|F|^+$.

On définit une famille $(\theta_A)_{A\in\mathbf{Bip}}$ de morphismes $\theta_A : \underset{u}{!}\, A \to !A$ de $\mathbf{Bip}$ et une famille $(\zeta_A)_{A\in\mathbf{Bip}}$ de morphismes $\zeta_A : !A \to \underset{u}{!}\, A$ en posant l'égalité d'ensembles $\theta_A = \zeta_A = \mathrm{id}_{\underset{u}{!}\, A}$. On obtient alors facilement les commutations de diagrammes nécessaires à l'application du théorème 2.1. Ainsi le modèle relationnel bipartite non-uniforme et le modèle relationnel non-uniforme définissent le même collapse extensionnel.

6.3 La sémantique K-cohérente de la logique linéaire

Cette section et la section 6.4 sont, pour l'essentiel, tirée de l'article [Bou03].

Désormais, nous supposons donné un sous-ensemble K de $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et on appelle les espaces de $\mathcal{M}_K$-cohérences, espace K-cohérents.

Les sémantiques K-cohérentes de la logique linéaire ont été initialement obtenues en suivant la construction décrite à la fin de l'article [BE01] présentant le procédé de Bucciarelli-Ehrhard de construction d'une sémantique dénotationnelle de la logique linéaire à partir d'un modèle de phase d'une *logique linéaire indexée*. Plus précisément, pour chaque $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, un modèle de phase à trois faits (cohérence, incohérence et neutralité) est construit à partir d'un monoïde produit M^k où M est le monoïde commutatif $\{0, 1, \tau\}$ de loi interne donnée par $0.x \mapsto 0$, pour $x = 0, 1, \tau$, et $1.y \mapsto 1$ et $\tau.y \mapsto \tau$, pour $y = 1, \tau$.

Le procédé de Bucciarelli-Ehrhard produit alors une sémantique $\{k\}$-cohérente non-uniforme de la logique linéaire pour chaque $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Du fait de la non-uniformité, ces sémantiques peuvent alors être combinées pour former un sémantique K-cohérente non-uniforme de la logique linéaire pour n'importe quel $K \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Nous n'entrerons pas plus dans les détails de cet usage particulier du procédé et nous donnons ici une description directe des sémantiques K-cohérentes obtenues.

Les cas intéressant sont alors

- le cas $K = \varepsilon$ pour lequel la sémantique K-cohérente coïncide avec la sémantique relationnelle (en particulier un espace ε-cohérent est alors juste la donnée d'un ensemble) ;
- le cas $K = \{2\}$ qui fournit une sémantique cohérente non-uniforme. Celle-ci est décrite dans [BE01] ;
- et, enfin, le cas $K = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ que nous pouvons voir en première lecture comme une version non-uniforme de la sémantique hypercohérente.

6.3.1 Interprétation de MALL... rien de nouveau

L'interprétation du fragment multiplicatif-additif de la logique linéaire suit un schéma standard. Conformément à la définition 6.4, la négation linéaire est l'échange de la cohérence et de l'incohérence.

Les constantes additives sont toutes deux égales à l'espace K-cohérent vide, *i.e.* ($0 = \top = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$). Les constantes multiplicatives sont toutes deux égales à l'espace K-cohérent réflexif a un seul point, *i.e.* $1 = \perp = (\{*\}, \mathcal{M}_K(\{*\}), \mathcal{M}_K(\{*\}))$.

Soient X_1 et X_2 deux espaces K-cohérents.

- Lorsque $|X_1|$ et $|X_2|$ sont disjoints, l'espace K-cohérent $X_1 \oplus X_2$ a pour trame $|X_1| \cup |X_2|$ et sa cohérence est donnée par $\mathsf{N}_{X_1 \oplus X_2} = \mathsf{N}_{X_1} \cup \mathsf{N}_{X_2}$ et $\frown_{X_1 \oplus X_2} = \frown_{X_1} \cup \frown_{X_2}$. Et, bien entendu, l'espace K-cohérent $X_1 \& X_2$ est pris égal à $({X_1}^{\perp} \oplus {X_2}^{\perp})^{\perp}$. Si les trames des deux espaces X_1 et X_2 ne sont pas disjointes, on utilise l'union disjointe en lieu et place de l'union.
- L'espace $X_1 \otimes X_2$ est défini comme suit. On pose $|X_1 \otimes X_2| = |X_1| \times |X_2|$. Pour $i = 1, 2$, soit $\pi_i : \mathcal{M}_K(|X_1 \otimes X_2|) \to \mathcal{M}_K(|X_i|)$ les projections canoniques définies par $\pi_1([(a_j, b_j) \mid j \in J]) = [a_j \mid j \in J]$ et $\pi_2([(a_j, b_j) \mid j \in J]) = [b_j \mid j \in J]$. Alors, pour chaque $s \in \mathcal{M}_K(|X_1 \otimes X_2|)$, on pose

$$
\begin{aligned}
s \in \mathsf{N}_{X_1 \otimes X_2} &\text{ ssi } \pi_1(s) \in \mathsf{N}_{X_1} \text{ et } \pi_2(s) \in \mathsf{N}_{X_2}\\
s \in \smile_{X_1 \otimes X_2} &\text{ ssi } \pi_1(s) \in \smile_{X_1} n \text{ ou } \pi_2(s) \in \smile_{X_2}
\end{aligned}
$$

  et ceci suffit à définir $\coh_{X_1 \otimes X_2}$ et $\asymp_{X_1 \otimes X_2}$. L'espace $X_1 \parr X_2$ est, bien entendu, pris égal à $({X_1}^{\perp} \otimes {X_2}^{\perp})^{\perp}$.

La *flèche linéaire* $\multimap$ entre espaces K-cohérents est définie par $X \multimap Y = X^{\perp} \parr Y$.

On a alors

$$
s \in \coh_{X \multimap Y} \text{ ssi } \begin{cases} \pi_1(s) \in \coh_X \implies \pi_2(s) \in \coh_Y \\ \pi_1(s) \in \frown_X \implies \pi_2(s) \in \frown_Y \end{cases} \tag{6.1}
$$

ce qui est équivalent à

$$
s \in \coh_{X \multimap Y} \text{ ssi } \begin{cases} \pi_2(s) \in \smile_Y \implies \pi_1(s) \in \smile_X \\ (\pi_1(s) \in \coh_X \text{ et } \pi_2(s) \in \mathsf{N}_Y) \implies \pi_1(s) \in \mathsf{N}_X. \end{cases} \tag{6.2}
$$

ou encore à

$$
\coh_{X \multimap Y} s \text{ ssi } \begin{cases} \coh_X \pi_1(s) \implies \coh_Y \pi_2(s) \\ \asymp_Y \pi_2(s) \implies \asymp_X \pi_1(s). \end{cases} \tag{6.3}
$$

Un *morphisme linéaire* de X dans Y, deux espaces K-cohérents, est une clique de $X \multimap Y$.

On note $\mathbf{NCOH}_K$ la catégorie dont les objets sont les espaces K-cohérents, dont les morphismes sont les morphismes linéaires et où la composition et les identités sont celles de $\mathbf{Rel}$, *i.e.*

$$f \mathbin{;} g = \{(a,c) \mid \exists b, (a,b) \in f \text{ et } (b,c) \in g\}$$

et $\mathrm{id}_X = \{(a,a) \mid a \in |X|\}$. Pour chaque $K' \subseteq K$, on a un foncteur d'oubli $U_{K,K'} : \mathbf{NCOH}_K \to \mathbf{NCOH}_{K'}$ qui laisse les morphismes linéaires à l'identique. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur K et K' on note simplement U ce foncteur.

Le *type booléen*, noté **bool** et représenté en logique linéaire par la formule $1 \oplus 1$, a pour interprétation dans $\mathbf{NCOH}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, l'espace $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$-cohérent réflexif de trame $\{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$ et dont la cohérence est $\mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(\{\mathtt{v}\}) \cup \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(\{\mathtt{f}\})$.

Proposition 6.11 (modèle de MALL). *Pour chaque $K \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, la catégorie $\mathbf{NCOH}_K$ est un modèle de* MALL *et pour chaque $K' \subseteq K$ (en particulier pour $K' = \emptyset$) le foncteur $U_{K,K'}$ est logique (c'est-à-dire que ce foncteur commute à l'interprétation des formules et des preuves) relativement aux modèles $\mathbf{NCOH}_K$ et $\mathbf{NCOH}_{K'}$ de* MALL.

Cela signifie que $\mathbf{NCOH}_K$ est une catégorie symétrique monoïdale close (avec $\otimes$ pour produit et $\multimap$ pour objet des morphismes) qui est $*$-autonome ($\perp$ est l'objet dualisant), et qui, de plus, a tous les produits et co-produits finis (les définitions précises sont, par exemple, dans [AC98]). La preuve est une vérification directe.

6.3.2 Exponentielles

Dans la sémantique K-cohérente obtenue par le procédé de Bucciarelli-Ehrhard, la construction $!_0$ servant à interpréter le *bien sûr* est la suivante. Si X est un espace K-cohérent, on pose $|\,!_0(X)| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|)$. Un multi-ensemble $m = [x_i \mid 1 \leq i \leq k] \in \mathcal{M}_K(|\,!_0(X)|)$ (donc tel que $k \in K$) est strictement incohérent dans $!_0(X)$ ssi il existe un multi-ensemble $[a_j \mid 1 \leq j \leq k] \in \mathcal{M}_K(|X|)$ de même cardinalité que m, strictement incohérent dans X et tel que $[a_j \mid 1 \leq j \leq k] \leq \sum_{i=1}^k x_i$. Si un tel multi-ensemble $[a_j \mid 1 \leq j \leq k]$ n'existe pas, alors m est cohérent et m est alors strictement cohérent ssi le multi-ensemble $\sum_{i=1}^k x_i$ est *étoilé* c'est-à-dire s'il existe un élément a du multi-ensemble $\sum_{i=1}^k x_i$ tel que

$$\forall (a_j)_{1\leq j\leq k} \in |X|^k, ([a_j \mid 1 \leq j \leq k] \leq \sum_{i\in I} x_i \text{ et } a_k = a) \implies [a_j \mid 1 \leq j \leq k] \in \frown_X .$$

Remarque 6.12 *(feuilletage).* Dans l'interprétation des formules de la logique linéaire, la cohérence est *feuilletée*, c'est-à-dire que, dans l'interprétation d'une formule A qui n'est ni une constante ni un atome, la cohérence d'un multi-ensemble de cardinalité k est totalement déterminée par la cohérence de multi-ensembles de la même cardinalité k dans l'interprétation des sous-formules immédiates de A.

L'espace K-cohérent $E_0(\textbf{bool})$ a alors pour trame $|E_0(\textbf{bool})| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(\mathtt{v}, \mathtt{f})$ et sa cohérence est donnée comme suit. Si $[x_i \mid i \in I] \in \mathcal{M}_K(|E_0(\textbf{bool})|)$ alors :

$$[x_i \mid i \in I] \in \smile_{E_0(\textbf{bool})} \text{ ssi } \sum_{i\in I} x_i = p[\mathtt{v}] + q[\mathtt{f}] \text{ avec } p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ et } p + q \geq \sharp I$$

$$[x_i \mid i \in I] \in \frown_{E_0(\textbf{bool})} \text{ ssi } \sum_{i\in I} x_i = p[\mathtt{v}] + q[\mathtt{f}] \text{ avec } 1 \leq p + q < \sharp I$$

$$\text{donc } [x_i \mid i \in I] \in \mathsf{N}_{E_0(\textbf{bool})} \text{ ssi } \sum_{i\in I} x_i = [], k[\mathtt{v}] \text{ ou } k[\mathtt{f}] \text{ avec } k \geq n\sharp I.$$

Pour le cas où $K = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, l'intention était d'obtenir une sémantique proche de la sémantique hypercohérente. Or, une propriété essentielle de la sémantique hypercohérente est que toute clique finie de type $\textbf{bool}^n \to \textbf{bool}$ est définissable dans PCF (en utilisant les projections, les fonctions constantes et la conditionnelle `if · then · else ·` mais pas l'opérateur de point fixe). Cette propriété n'est pas vérifiée par la sémantique $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$-cohérente, et ce même pour les cliques de $\mathbf{bool}^n \to \mathbf{bool}$ qui n'utilisent pas de points dans $E_0(\mathbf{bool})$ qui contiennent à la fois `v` et `f`. Nous le montrons pour l'exemple suivant.

Soit f le sous-ensemble de $|(E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})) \multimap \mathbf{bool}|$ égal à

$$f = \{ \begin{array}{lllll} (([], & [\mathtt{v},\mathtt{v}], & [\mathtt{f},\mathtt{f}]), & \mathtt{v}), \\ (([\mathtt{f},\mathtt{f}], & [], & [\mathtt{v},\mathtt{v}]), & \mathtt{v}), \\ (([\mathtt{v},\mathtt{v}], & [\mathtt{f},\mathtt{f}], & []), & \mathtt{v})\}. \end{array}$$

Ce sous-ensemble est une variante de l'exemple de G. Berry d'une fonction stable de type $\mathbf{bool}^3 \to \mathbf{bool}$ qui n'est pas séquentielle. Ce sous-ensemble f est aussi un sous-ensemble de la trame de l'interprétation de $\mathbf{bool}^3 \to \mathbf{bool}$ dans la sémantique hypercohérente multi-ensembliste mais ce n'est pas une clique pour cette sémantique. Pourtant, dans la sémantique $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$-cohérente, f est une clique de l'interprétation $(E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})) \multimap \mathbf{bool}$ de $\mathbf{bool}^3 \to \mathbf{bool}$. En effet, pour chaque multi-ensemble $s \in \mathcal{M}_K(f)$, $\pi_2(s) \in \mathcal{M}_K(\{\mathtt{v}\})$ donc $\pi_2(s) \in \mathsf{N}_{\mathbf{bool}}$ et d'après (6.1), la seule possibilité pour que s soit strictement incohérent $(E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})) \multimap \mathbf{bool}$ est que $\pi_1(s)$ soit strictement cohérent dans $E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})$. Mais, si m_1, m_2 et m_3 sont les nombres d'occurrences respectives des points de f dans s, alors

– si seulement l'un des m_i est non nul, alors chacune des trois projections de $\pi_1(s)$ sur $E_0(\mathbf{bool})$ est neutre, donc $\pi_1(s)$ est neutre ;
– si exactement deux des m_i sont non nuls (on peut en toute généralité supposer qu'il s'agit de m_1 et de m_2), alors l'une des trois projections de $\pi_1(s)$ sur $E_0(\mathbf{bool})$ ne contient pas le multi-ensemble vide [] (ici il s'agit de la troisième projection), donc la somme des multi-ensembles contenus dans cette projection contient assez de `v` et de `f` (ici $2m_1\mathtt{f}$ et $2m_2\mathtt{v}$) en comparaison de sa cardinalité (ici $m_1 + m_2$) pour que cette projection soit strictement incohérente dans **bool**. Donc si exactement deux des m_i sont non nuls, $\pi_1(s)$ est strictement incohérent ;
– Finalement supposons qu'aucun des m_i n'est nul. Le multi-ensemble $\pi_1(s)$ est cohérent ssi chacune des trois projections de $\pi_1(s)$ sur $E_0(\mathbf{bool})$ est cohérente et ceci revient à avoir les trois inégalités suivantes :

$$m_1 + m_2 + m_3 > 2m_2 + 2m_3 \text{ (cohérence sur la première projection)}$$
$$m_1 + m_2 + m_3 > 2m_1 + 2m_3 \text{ (cohérence sur la deuxième projection)}$$
$$m_1 + m_2 + m_3 > 2m_1 + 2m_2 \text{ (cohérence sur la troisième projection).}$$

Mais on aurait alors $3(m_1 + m_2 + m_3) > 4(m_1 + m_2 + m_3)$, ce qui est impossible.

Ainsi f est bien une clique de $(E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})) \multimap \mathbf{bool}$.[1]

Ainsi l'exponentielle obtenue par le procédé de Bucciarelli-Ehrhard ne permet pas d'avoir la même propriété de définissabilité à l'ordre 1 que dans les hypercohérences.

En fait, dans la catégorie des espaces K-cohérents, il est possible de définir d'autres variantes des exponentielles en ne changeant que la définition de la cohérence dans le *bien sûr* et d'obtenir ainsi différents modèles non-uniformes de la logique linéaire. Parmi les différentes solutions possibles celle que nous adoptons est la plus générale en un sens catégorique précisé dans le théorème 6.17 et que nous détaillons sous forme d'un résultat de maximalité avec le corollaire 6.18. Cette nouvelle définition du modèle ne permet pas d'obtenir la propriété de définissabilité des cliques finies, à l'ordre 1, que vérifie le modèle hypercohérent, mais la situation est bien meilleure car, à l'ordre 1, tout sous-ensemble qui n'est pas une clique dans le modèle hypercohérent multi-ensembliste n'est pas non plus une clique dans le modèle $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$-cohérent.

[1] Le même ensemble f où $[\mathtt{v}]$ remplace $[\mathtt{v},\mathtt{v}]$ et où $[\mathtt{f}]$ remplace $[\mathtt{f},\mathtt{f}]$ n'est pas une clique de l'espace $(E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool}) \otimes E_0(\mathbf{bool})) \multimap \mathbf{bool}$.

Définition 6.13. Pour chaque espace K-cohérent X nous définissons l'espace K-cohérent $!X$ comme suit. Sa trame est $|!X| = \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|)$ et pour chaque élément $[x_i \mid i \in I]$ de $\mathcal{M}_K(|!X|)$ on pose :

$$[x_i \mid i \in I] \in \smile_{!X} \text{ ssi } \exists (a_i)_{i\in I}, [a_i \mid i \in I] \in \smile_X \text{ et } \forall i \in I, a_i \in x_i \tag{6.4}$$

et

$$\begin{aligned} &[x_i \mid i \in I] \in \mathsf{N}_{!X} \text{ ssi} \\ &[x_i \mid i \in I] \notin \smile_{!X} \text{ et } \exists (a_i^j)_{i\in I}^{j\in J}, \begin{cases} \forall i \in I, [a_i^j \mid j \in J] = x_i \\ \forall j \in J, [a_i^j \mid i \in I] \in \mathsf{N}_X \end{cases} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Nous définissons l'espace $?X$ en posant $?X = (!X^\perp)^\perp$.

Lorsque $\forall i \in I, a_i \in x_i$ on dit que $[a_i \mid i \in I]$ est une *multi-section* de $[x_i \mid i \in I]$ et on écrit $[a_i \mid i \in I] \lhd [x_i \mid i \in I]$.

Exemple 6.14. Soit l'espace K-cohérent G dont la trame est $|G| = \{a, b, c\}$ et qui est tel que si $u \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|G|)$ alors : $u \in \mathsf{N}_G$ ssi $\mathrm{supp}(u)$ est un singleton, $u \in \frown_G$ ssi $\sharp\,\mathrm{supp}(u) = 2$ et $u \in \smile_G$ ssi $\mathrm{supp}(u) = \{a, b, c\}$. (L'espace G est en fait un sous-espace de **bool**$^3 \to$ **bool** de trame le sous-ensemble f défini ci-dessus).

Supposons que 2 est un élément de K. Toutes les multi-sections de $[[a], [b, c]]$ sont cohérentes dans G. De plus $[a]$ et $[b, c]$ n'ont pas la même cardinalité. Donc $[[a], [b, c]] \in \frown_{!G}$. Supposons maintenant que 3 est aussi un élément de K. Alors $[[a], [b, c], [b, c]]$ admet la multi-section $[a, b, c]$, strictement incohérente dans G. Par contre $[[a], [a], [b, c]]$ n'admet aucune multi-section strictement incohérente dans G. Donc $[[a], [b, c], [b, c]] \in \smile_{!G}$ mais $[[a], [a], [b, c]] \in \frown_{!G}$. Ainsi la relation de cohérence dans $!G$ dépend réellement des multiplicités.

Pour chaque élément $k \in K$ tel que $k \geq 3$, chaque multi-ensemble $m \in \mathcal{M}_{\{k\}}(|G|)$ tel que $\mathrm{supp}(m) = \{[a, b], [a, c]\}$ est strictement incohérent dans $!G$. En effet chacun de ces multi-ensemble admet une multi-section dont le support est $\{a, b, c\}$. Mais, si $2 \in K$, alors $[[a, b], [a, c]] \in \frown_{!G}$. En effet, toutes les multi-sections de $[[a, b], [a, c]]$ sont cohérentes dans G et ni $[b, a]$ ni $[b, c]$ n'est neutre dans G. Par ailleurs tout élément de $\mathcal{M}_K$ dont le support est $\{[a, b]\}$ ou $\{[a, c]\}$ est neutre dans $!G$. Ainsi, si $2 \in K$, alors $x = \{[a, b], [a, c]\}$ est une clique de l'espace $K \setminus \{2\}$-cohérent $(!G)^\perp$ mais x n'est pas une clique de l'espace K-cohérent $!G$.

De même, si $3 \in K$, le multi-ensemble $[[a, b, c], [a, b, c], [a, b, c]]$ est strictement incohérent dans $!G$. Il y a donc bien des multi-ensembles à support un singleton que ne sont pas neutres et donc des singletons (ici $\{[a, b, c]\}$) qui ne sont pas des cliques.

Proposition 6.15 (modèle de LL). *Chaque catégorie* $\mathbf{NCOH}_K$ *munie de l'exponentielle de la définition 6.13 est un modèle catégorique de la logique linéaire et pour chaque* $K' \subseteq K$ *(en particulier pour* $K' = \emptyset$*) le foncteur* $U_{K,K'}$ *est logique relativement aux modèles de* LL *dans* $\mathbf{NCOH}_K$ *et* $\mathbf{NCOH}_{K'}$.

Démonstration. Pour la fonctorialité de ! ainsi que pour la structure de comonade associée, nous suivons la construction standard de $\mathbf{Rel}$. C'est-à-dire que que si $f \in \mathbf{NCOH}_K(X, Y)$, alors on pose :

$$!f = \{([a_1, \ldots, a_n], [b_1, \ldots, b_n]) \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, (a_i, b_i) \in f\}$$

et si X est un espace K-cohérent, alors on pose :

$$\begin{aligned} &\mathrm{der}_X = \{([a], a) \mid a \in |X|\} \text{ et} \\ &\mathrm{dig}_X = \{(\sum_{1\leq i\leq n} x_i, [x_1, \ldots, x_n]) \mid n \in \mathbb{N}, [x_1, \ldots, x_n] \in |!!X|\}. \end{aligned}$$

Il faut montrer que $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ est une comonade de $\mathbf{NCOH}_K$. Pour cela on exploite le fait que toutes les égalités requises (les commutations de diagramme) sont vraies dans $\mathbf{Rel}$, et donc dans $\mathbf{NCOH}_K$. Nous avons donc seulement à prouver que $!f$ est une clique de $!X \multimap !Y$, que der_X est une clique de $!X \multimap X$ et que dig_X est une clique de $!X \multimap !!X$ (pour n'importe quels espaces K-cohérents X et Y). Pour cela nous utilisons la caractérisation (6.2) de la cohérence dans la flèche linéaire. Enfin nous montrons que les isomorphismes $!\bot \cong 1$ et $!(A \,\&\, B) \cong !A \otimes !B$ du modèle relationnel sont encore des isomorphismes dans $\mathbf{NCOH}_K$, ce qui suffit à montrer que la catégorie $\mathbf{NCOH}_K$ est un modèle de la logique linéaire, puisque les égalités requises pour que ces isomorphismes soient naturels et que l'adjonction induite par la comonade soit monoïdale ([Bie95]) sont vérifiées dans $\mathbf{Rel}$.

Soit un multi-ensemble $[(x_j, y_j) \mid j \in J] \in \mathcal{M}_K(!f)$. Si $[b_j \mid j \in J] \lhd [y_j \mid j \in J]$, alors par construction de $!f$ il existe un multi-ensemble $[a_j \mid j \in J]$ tel que $[(a_j, b_j) \mid j \in J] \in \mathcal{M}_K(f)$ et $[a_j \mid j \in J] \lhd [x_j \mid j \in J]$. Comme f est une clique, on a $[(a_j, b_j) \mid j \in J] \in \frown_{X \multimap Y}$. En particulier, si $[b_j \mid j \in J] \in \smile_Y$, alors $[a_j \mid j \in J] \in \smile_X$. Donc, si $[y_j \mid j \in J]$ admet une multi-section strictement incohérente, alors $(x_j)_{j \in J}$ admet aussi une multi-section strictement incohérente. Donc $[y_j \mid j \in J] \in \smile_{!Y} \implies [x_j \mid j \in J] \in \smile_{!X}$.

Supposons maintenant que $[x_j \mid j \in J] \in \frown_{!X}$ et $[y_j \mid j \in J] \in \mathsf{N}_{!Y}$. Nous devons prouver que $[x_j \mid j \in J] \in \mathsf{N}_{!X}$. Il existe une famille $(b^i_j)_{(i,j) \in I \times J}$ telle que $\forall j \in J, y_j = [b^i_j \mid i \in I]$ et $\forall i \in I, [b^i_j \mid j \in J] \in \mathsf{N}_Y$. Par construction de $!f$ il existe alors une famille $(a^i_j)_{(i,j) \in I \times J}$ telle que $\forall (i,j) \in I \times J, (a^i_j, b^i_j) \in f$ et $\forall j \in J, x_j = [a^i_j \mid i \in I]$. Comme $[x_j \mid j \in J] \in \frown_{!X}$ pour chaque $i \in I$, on a $[a^i_j \mid j \in J] \in \frown_X$. Mais, pour chaque $i \in I$, $[(a^i_j, b^i_j) \mid j \in J]$ est un multi-ensemble d'éléments de f, cohérent dans $X \multimap Y$ et $[b^i_j \mid j \in J]$ est neutre dans Y. Donc $[a^i_j \mid j \in J] \in \mathsf{N}_X$, pour chaque $i \in I$. Finalement $[x_j \mid j \in J] \in \mathsf{N}_{!X}$ et ceci conclut la preuve que $!f$ est une clique.

Le fait que der_X est une clique est immédiat. On prouve maintenant que dig_X est une clique de $!X \multimap !!X$. Soit un multi-ensemble $m = [(\sum_{i \in I_j} x^j_i, [x^j_i \mid i \in I_j]) \mid j \in J]$ élément de $\mathcal{M}_K(\mathrm{dig}_X)$.

Supposons que le multi-ensemble $[[x^j_i \mid i \in I_j] \mid j \in J]$ est strictement incohérent dans $!!X$. Ce multi-ensemble admet alors une multi-section $[y_j \mid j \in J]$ strictement incohérente dans $!X$. Donc cette multi-section $[y_j \mid j \in J]$ admet une multi-section $[a_j \mid j \in J]$ strictement incohérente dans X. Cette dernière multi-section $[a_j \mid j \in J]$ est clairement une multi-section de $[\sum_{i \in I} x^j_i \mid j \in J]$, donc le multi-ensemble $[\sum_{i \in I} x^j_i \mid j \in J]$ est aussi strictement incohérent dans $!X$.

Supposons maintenant que le multi-ensemble $[\sum_{i \in I_j} x^j_i \mid j \in J]$ est cohérent dans $!X$ et que le multi-ensemble $[[x^j_i \mid i \in I_j] \mid j \in J]$ est neutre dans $!!X$. Alors il existe une famille $(y^j_i)^{j \in J}_{i \in I}$ telle que : pour chaque $j \in J$, le multi-ensemble $[y^j_i \mid i \in I]$ est égal à $[x^j_i \mid i \in I_j]$ (donc $I = I_j$ et $\sum_{i \in I} y^j_i = \sum_{i \in I_j} x^j_i$) ; et, pour chaque $i \in I$, le multi-ensemble $[y^j_i \mid j \in J]$ est neutre dans $!X$. Donc, pour chaque $i \in I$, il existe une famille $(a^j_{i,l})^{j \in J}_{l \in L_i}$ telle que : pour chaque $j \in J$, $y^j_i = [a^j_{i,l} \mid l \in L_i]$ et pour chaque $l \in L_i$, $[a^j_{i,l} \mid j \in J] \in \mathsf{N}_X$. En toute généralité, on peut choisir les L_i disjoints deux à deux. On pose $L = \cup_{i \in I} L_i$. On a alors $\sum_{l \in L} a^j_l = \sum_{i \in I_j} x^j_i$ et, pour chaque $l \in L$, $[a^j_l \mid j \in J] \in \mathsf{N}_X$. Ainsi le multi-ensemble $[\sum_{i \in I_j} x^j_i \mid j \in J]$ est neutre dans $!X$. Donc dig_X est une clique, ce qui finit de montrer que $(!, \mathrm{dig}, \mathrm{der})$ est bien une comonade.

L'ensemble $\{([], *)\}$ est une clique de $!\top \multimap 1$ et l'ensemble $\{(*, [])\}$ est une clique de $1 \multimap !\top$, donc l'isomorphisme $!|\top| \cong |1|$ du modèle relationnel est bien un isomorphisme $!\top \cong 1$ de $\mathbf{NCOH}_K$.

Soient X et Y deux espaces K-cohérents. Dans le modèle relationnel, l'isomorphisme de $!|X| \otimes !|Y|$ dans $!(|X| \& |Y|)$ est égal au graphe f de la bijection

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|) \times \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|Y|) & \to \quad \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X \& Y|) \\ \qquad\qquad (x, y) & \mapsto \quad x + y. \end{cases}$$

Il reste à prouver que f est une clique de l'espace $(!X \otimes !Y) \multimap !(X\&Y)$ et que sa transposée est une clique de l'espace $!(X\&Y) \multimap (!X \otimes !Y)$.

Soit un multi-ensemble $[((x_i, y_i), x_i + y_i) \mid i \in I] \in \mathcal{M}_K(f)$. Comme un élément de $\smile_{X\&Y}$ est soit un élément de $\smile_X$ soit un élément de $\smile_Y$, une multi-section s de $[x_i + y_i \mid i \in I]$ est strictement incohérente dans $X\&Y$ ssi s est une multi-section strictement incohérente de $[x_i \mid i \in I]$ dans X ou une multi-section strictement incohérente de $[y_i \mid i \in I]$ dans Y. On en déduit que :

$$[x_i + y_i \mid i \in I] \in \smile_{!(X\&Y)} \iff [(x_i, y_i) \mid i \in I] \in \smile_{!X \otimes !Y}.$$

Un élément de $\mathsf{N}_{X\&Y}$ est soit un élément de N_X soit un élément de N_Y. Si $[x_i + y_i \mid i \in I]$ est neutre dans $!(X\&Y)$, alors il existe une famille $(c_i^j)_{i\in I}^{j\in J}$ telle que, pour chaque $j \in J$, le multi-ensemble $[c_i^j \mid i \in I]$ est neutre dans $X \,\&\, Y$ et tel que $J = J_X + J_Y$ avec, pour chaque $i \in I$, $[c_i^j \mid j \in J_X] = x_i$ et $[c_i^j \mid j \in J_Y] = y_i$. Une telle famille $(c_i^j)_{i\in I}^{j\in J}$ est donc la réunion de deux familles $(c_i^j)_{i\in I}^{j\in J_X}$ et $(c_i^j)_{i\in I}^{j\in J_Y}$, la première satisfaisant les propriétés nécessaires à établir la neutralité de $[x_i \mid i \in I]$ dans $!X$ et la seconde satisfaisant les propriétés nécessaires pour montrer que $[y_i \mid i \in I]$ est neutre dans $!Y$. Par conséquent, la neutralité de $[x_i + y_i \mid i \in I]$ dans $!(X\&Y)$ implique la neutralité de $[(x_i, y_i) \mid i \in I]$ dans $!X \otimes !Y$. La réciproque est directe. Donc finalement f et sa transposée forment bien un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{NCOH}_K$, ce qui achève la preuve. $\square$

6.3.3 Le *bien sûr* est le $\otimes$-comonoïde libre

Un comonoïde commutatif sur une catégorie symétrique monoïdale $\mathcal{C}$, de structure monoïdale $(\otimes, \mathrm{sym}, \mathrm{ass}, \mathrm{unit})$, est un triplet $M = (\underline{M}, u_M, \mu_M)$ où $\underline{M} \in \mathcal{C}$, $u_M \in \mathcal{C}(\underline{M}, 1)$ et $\mu_M \in \mathcal{C}(\underline{M}, \underline{M} \otimes \underline{M})$ tel que

- (associativité) $I_{\underline{M}} \otimes \mu_M = (\mu_M \otimes I_{\underline{M}}) \mathbin{⨾} \mathrm{ass}_{\underline{M},\underline{M},\underline{M}}$;
- (neutralité) $\mu_M \mathbin{⨾} (I_{\underline{M}} \otimes u_M) = \mathrm{unit}_{\underline{M}}$ et
- (commutativité) $\mu_M \mathbin{⨾} \mathrm{sym}_{\underline{M}} = \mu_M$.

Un morphisme de comonoïde f de (A, u_A, μ_A) vers (B, u_B, μ_B) est un morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ tel que $f \mathbin{⨾} u_B = u_A$ et $f \mathbin{⨾} \mu_B = \mu_A \mathbin{⨾} (f \otimes f)$.

Dans tout modèle catégorique de la logique linéaire $\mathcal{C}$, le *bien sûr* fournit un $\otimes$-comonoïde $(!X, \mathrm{aff}, \mathrm{cont})$ pour chaque objet X : aff est le morphisme $!\top_X$ où $\top_X$ est l'unique morphisme de $\mathcal{C}(X, \top)$ et cont est le morphisme égal à $(![\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X]) \mathbin{⨾} e_X$, où $[\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X]$ est le couplage de l'identité id_X avec elle même et où e_X est l'isomorphisme $!(X \,\&\, X) \cong !X \otimes !X$. Par exemple, dans $\mathbf{NCOH}_K$, on a $\mathrm{aff} = \{([], *)\}$ et $\mathrm{cont} = \{(x_1 + x_2, (x_1, x_2)) \mid x_1, x_2 \in |!X|\}$. De plus, si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, alors $!f$ est un morphisme de $\otimes$-comonoïdes de $(!X, \mathrm{aff}, \mathrm{cont})$ vers $(!Y, \mathrm{aff}_Y, \mathrm{cont}_Y)$.

Un comonoïde (F, u_F, μ_F) est dit co-libre relativement à un objet X de $\mathcal{C}$ lorsqu'il existe un morphisme $d \in \mathcal{C}(F, X)$ tel que, pour chaque comonoïde (A, u_A, μ_A), et pour chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(A, X)$, il existe un unique morphisme de comonoïde f_* de (A, u_A, μ_A) vers (F, u_F, μ_F) tel que $f_* \mathbin{⨾} d = f$.

Par extension, le *bien sûr*, !, est le $\otimes$-comonoïde libre, lorsque, pour chaque comonoïde commutatif (A, u_A, μ_A), pour chaque $X \in \mathcal{C}$ et pour chaque $f \in \mathcal{C}(A, X)$, il existe un unique morphisme de comonoïde $f_* : (A, u_A, \mu_A) \to (!X, \mathrm{aff}, \mathrm{cont})$ tel que

$$f_* \mathbin{⨾} \mathrm{der}_X = f.$$

Dans ce cas on dit encore que l'exponentielle est libre. Si l'exponentielle est libre, alors on a $f_* = \mathrm{id}_* \mathbin{⨾} !f$ où id est le morphisme identité dans $\mathcal{C}(A, A)$.

Lemme 6.16. *Dans* $\mathbf{Rel}$ *l'exponentielle est libre. De plus, si* (A, u_A, μ_A) *est un* $\otimes$*-comonoïde dans* $\mathbf{Rel}$*, alors* $(a, x) \in (\mathrm{id}_A)_*$ *ssi si* $(a_i)_{1 \le i \le n}$ *est tel que* $[a_1, \ldots, a_n] = x$ *alors il existe une suite* $(b_i)_{0 \le i \le n}$ *d'éléments de* A *telle que* $b_0 = a$*,* $(b_i, (a_{i+1}, b_{i+1})) \in \mu_A$ *pour chaque* $i < n$*, et* $(b_n, *) \in u_A$*.*

Théorème 6.17 (exponentielle libre). *Le* bien sûr, !, *est le* $\otimes$*-comonoïde libre de* $\mathbf{NCOH}_K$.

Démonstration. Nous devons prouver que, pour chaque $\otimes$-comonoïde commutatif (A, u_A, μ_A) de $\mathbf{NCOH}_K$, pour chaque $X \in \mathbf{NCOH}_K$ et pour chaque $f \in \mathbf{NCOH}_K(A, X)$, il existe un unique morphisme de comonoïde commutatif f_* de (A, u_A, μ_A) vers $(!X, \mathrm{der}_X, \mathrm{cont}_X)$ tel que $f_* \mathbin{⨾} \mathrm{der}_X = f$.

Dans $\mathbf{Rel}$, $(U(A), U(u_A), U(\mu_A))$ est un comonoïde commutatif, $U(f)$ est un morphisme de $U(A)$ dans $U(X)$ et $(U(!X), U(\mathrm{aff}_X), U(\mathrm{cont}_X))$ est le $\otimes$-comonoïde commutatif libre. Donc il existe un unique morphisme $U(f)_*$ tel que $U(f)_* \mathbin{⨾} U(\mathrm{der}_X) = U(f)$. Et ce morphisme $U(f)_*$ est égal à $(!U(f)) \mathbin{⨾} \mathrm{id}_*$ où id est l'identité de $\mathbf{Rel}(A, A)$.

Comme $!U(f) = U(!f)$, il suffit de montrer que id_* est un clique de $A \multimap !A$ pour montrer que $U(f)_*$ est une clique de $A \multimap !X$ qui est un morphisme de comonoïde commutatif f_* de (A, u_A, μ_A) vers $(!X, \mathrm{der}, \mathrm{cont})$ tel que $f_* \mathbin{⨾} \mathrm{der} = f$. Par ailleurs, pour tout morphisme de comonoïde commutatif g de (A, u_A, μ_A) vers $(!X, \mathrm{der}, \mathrm{cont})$ tel que $g \mathbin{⨾} \mathrm{der} = f$, le foncteur d'oubli envoie g sur un morphisme de comonoïde commutatif de $(U(A), U(u_A), U(\mu_A))$ vers $(U(!X), U(\mathrm{aff}_X), U(\mathrm{cont}))$ qui vérifie $U(g) \mathbin{⨾} U(\mathrm{der}) = U(f)$. Ainsi $U(g)$ est égal à $U(f)_*$ donc g est égal à f_* et ceci prouve l'unicité de f_*. Pour montrer l'existence et l'unicité de f_* il suffit donc de prouver que id_* est un clique de $A \multimap !A$.

Soit un multi-ensemble $[(a^i, [a^i_1, \ldots, a^i_{n_i}]) \mid i \in I]$ élément de $\mathcal{M}_K(\mathrm{id}_*)$. Alors, par le lemme 6.16, pour chaque $i \in I$, on a une famille $(b^i_j)_{0 \leq j \leq n_i}$ telle que $b^i_0 = a^i$, pour chaque $j < n_i$, $(b^i_j, (a^i_{j+1}, b^i_{j+1})) \in U(\mu_A) = \mu_A$, et $(b^i_{n_i}, *) \in U(u_A) = u_A$.

Supposons que le multi-ensemble $[[a^i_1, \ldots, a^i_{n_i}] \mid i \in I]$ est strictement incohérent dans $!A$. Alors il admet une multi-section s strictement incohérente dans A et aucun des n_i n'est nul. Quitte à ré-indexer les éléments des multi-ensembles $[a^i_1, \ldots, a^i_{n_i}]$ pour chaque $i \in I$, on peut supposer que cette multi-section s est égale à $[a^i_1 \mid i \in I]$. Ainsi $[a^i_1 \mid i \in I] \in \smile_A$. Donc le multi-ensemble $[(a^i_1, b^i_1) \mid i \in I]$ est strictement incohérent dans $A \otimes A$. Mais, comme μ_A est une clique de $A \multimap (A \otimes A)$, le multi-ensemble $[(a^i, (a^i_1, b^i_1)) \mid i \in I]\mathcal{M}_K(\mu_A)$ est cohérent dans $A \multimap (A \otimes A)$. Nous avons donc $[a^i \mid i \in I] \in \smile_A$.

Supposons maintenant que $[a^i \mid i \in I] \in \frown_A$ et $[[a^i_1, \ldots, a^i_{n_i}] \mid i \in I] \in \mathsf{N}_A$. D'après la définition de la neutralité dans le *bien sûr*, c'est que tous les n_i sont égaux, disons que $n_i = n (\forall i \in I)$, et, à une ré-indexation appropriée près, que les multi-ensembles $[a^i_j \mid i \in I]$ sont neutres dans A (pour $1 \leq j \leq n$). Par ailleurs, $[(b^i_n, *) \mid i \in I] \in \mathcal{M}_K(u_A) \subseteq \frown_{A \multimap 1}$ et $[* \mid i \in I] \in \mathsf{N}_1$, donc $[b^i_n \mid i \in I] \in \asymp_A$. Supposons que $[b^i_{k+1} \mid i \in I] \in \asymp_A$, pour un certain $k < n$. Comme $[a^i_{k+1} \mid i \in I] \in \mathsf{N}_A$ et $[(b^i_k, (a^i_{k+1}, b^i_{k+1})) \mid i \in I] \in \mathcal{M}_K(\mu_A)$ on a alors $[b^i_k \mid i \in I] \in \mathsf{N}_A$. On en déduit que, pour chaque $j \leq n$, $[b^i_j \mid i \in I] \in \asymp_A$. En particulier le multi-ensemble $[b^i_0 \mid i \in I] = [a^i \mid i \in I]$ est incohérent dans A. Et, comme, par hypothèse, ce multi-ensemble $[a^i \mid i \in I]$ est cohérent, c'est qu'il est neutre dans A.

Conformément à la caractérisation (6.2) de la cohérence dans la flèche linéaire, ceci prouve bien que $[(a^i, [a^i_1, \ldots, a^i_{n_i}]) \mid i \in I]$ est cohérent dans $A \multimap !A$. Et ainsi id_* est bien une clique de $A \multimap !A$, ce qui achève la preuve. □

Une question ouverte, techniquement difficile et sur laquelle travaille A. Bruasse-Bac, est de savoir si le procédé de Bucciarelli-Ehrhard peut être modifié de manière à produire directement des exponentielles libres.

Le fait que notre exponentielle K-cohérente soit libre lui confère une certaine canonicité catégorique. Nous montrons que cette canonicité s'assortit d'un résultat plus concret de maximalité de la modélisation des exponentielles dans les espaces K-cohérents.

Soit une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathbf{NCOH}_K$ équipée de la structure monoïdale close de $\mathbf{NCOH}_K$. Alors $\mathcal{C}$ est un modèle catégorique du fragment multiplicatif de la logique linéaire intuitionniste pour la structure monoïdale close induite par $\mathbf{NCOH}_K$. Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ possède la structure nécessaire pour que ce modèle s'étende en un modèle du fragment multiplicatif exponentiel de la logique linéaire intuitionniste (MEILL).[2] Notons E la construction sur les ob-

[2]Nous n'avons pas besoin de faire plus d'hypothèse sur $\mathcal{C}$, mais une catégorie $\mathcal{C}$ typique serait un modèle à la Seely de la logique linéaire dans lequel les constructions multiplicatives-additives seraient celles de $\mathbf{NCOH}_K$ et dans lequel

jets utilisée dans $\mathcal{C}$ pour interpréter le *bien sûr*. Nous disons que le modèle catégorique $\mathcal{C}$ est *multi-ensembliste* si, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$:

- la trame de $E(X)$ est un ensemble de multi-ensembles finis de points de la trame de X (*i.e.* $|E(X)| \subseteq \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|)$) ;
- la structure de $\otimes$-comonoïde commutatif $(E(X), \text{aff}'_X, \text{cont}'_X)$ fournie par le modèle est telle que $\text{aff}'_X = \{([], *)\}$ (de type $E(X) \to 1$) et

  $$\text{cont}'_X = \{(x_1 + x_2, (x_1, x_2)) \mid x_1 + x_2 \in |E(X)| \text{ et } x_1, x_2 \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|)\}$$

  (de type $E(X) \to E(X) \otimes E(X)$) ;
- et le morphisme de déréliction associé à cette structure est $\text{der}'_X = \{([a], a) \mid a \in |X|\}$ (de type $E(X) \to X$).

Corollaire 6.18 (maximalité de l'exponentielle libre). *Si une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathbf{NCOH}_K$, munie de la structure monoïdale close de $\mathbf{NCOH}_K$, est un modèle multi-ensembliste de* MEILL, *alors, pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$,*

$$\smile_{E(X)} \subseteq \smile_{!X} \tag{6.6}$$

et

$$\frown_{E(X)} \subseteq \frown_{!X} \tag{6.7}$$

où E est la construction sur les objets dans $\mathcal{C}$ utilisée pour interpréter le bien sûr.

Démonstration. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ et soit $(E(X), \text{aff}'_X, \text{cont}'_X)$ la structure de $\otimes$-comonoïde commutatif fournie par le modèle. Soit enfin der'_X le morphisme déréliction associé à X dans $\mathcal{C}$. D'après le théorème 6.17, il existe un morphisme $\text{der}'_{X,*}$ dans $\mathbf{NCOH}_K$ de $E(X)$ dans $!X$ tel que $\text{der}'_{X,*} \,{}^\circ_\circ\, \text{der}_X = \text{der}'_X$. De plus $\text{der}'_{X,*} = \text{id}[E(X), *] \,{}^\circ_\circ !(\text{der}'_X)$ et, d'après la preuve du théorème 6.17, l'ensemble $\text{id}[E(X), *]$ est donné par le lemme 6.16 pour $A = E(X)$, aff'_X et $\mu_A = \text{cont}'_X$. En utilisant le fait que $\mathcal{C}$ est multi-ensembliste, on obtient que :

- le morphisme $!(\text{der}'_X)$ de $\mathbf{NCOH}_K(!E(X), !X)$ est égal a l'ensemble :

  $$\{([[a_1], \ldots, [a_n]], [a_1, \ldots, a_n] \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in E(X)\}$$

- le morphisme $\text{id}[E(X), *]$ de $\mathbf{NCOH}_K(E(X), !E(X))$ est l'ensemble de tous les éléments $(x, [x_1, \ldots, x_n])$ de $|E(X) \multimap !E(X)|$ pour lesquels il existe une suite $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $E(X)$ telle que $y_0 = x$, $y_i = x_{i+1} + y_{i+1}$ pour chaque $i < n$, et $y_n = []$.

En composant, on en déduit que $\text{der}'_{X,*}$ est l'ensemble de tous les éléments $(x, [a_1, \ldots, a_n])$ de $|E(X) \multimap !X|$ pour lesquels il existe une suite $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments de $E(X)$ telle que $y_0 = x$, $y_i = [a_{i+1}] + y_{i+1}$ pour chaque $i < n$, et $y_n = []$. Ce qui se simplifie en

$$\text{der}'_{X,*} = \{(x, [a_1, \ldots, a_n]) \in |E(X) \multimap !X| \mid x = [a_1] + \ldots + [a_n] + []\}.$$

Finalement, comme $|E(X)| \subseteq |!X|$, le morphisme $\text{der}'_{X,*}$ est égal à $\{(x, x) \mid x \in |E(X)|\}$, et c'est donc que la relation d'inclusion de $E(X)$ dans $!X$ est un morphisme de $\mathbf{NCOH}_K$. En utilisant (6.1), on obtient alors les deux inclusions (6.6) et (6.7). $\square$

Nous disons que le modèle catégorique multi-ensembliste $\mathcal{C}$ de MEILL est *non-uniforme* lorsque la trame de $E(X)$ est égale à $\mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|)$, pour tout objet X de $\mathcal{C}$.

Corollaire 6.19 (échec de séquentialité). *Pour tout $K \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et dans toute sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathbf{NCOH}_K$ qui est un modèle multi-ensembliste non-uniforme de* ILL, *la relation*

$$f = \{([\boldsymbol{v}], \boldsymbol{v}), ([\boldsymbol{f}], \boldsymbol{v}), ([\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}], \boldsymbol{v})\}$$

est un morphisme de type ***bool*** $\to$ ***bool***.

---

seul la comonade exponentielle serait différente de celle de $\mathbf{NCOH}_K$.

Remarques 6.20.
- Ce corollaire est à notre avis un résultat négatif fort puisque cette relation f n'est l'interprétation d'aucun terme de PCF. Plus généralement, nous pensons qu'il ne peut pas y avoir de calcul séquentiel interprétable dans $\mathcal{C}$ dans lequel cette relation soit l'interprétation d'un terme.
- La relation, très similaire, $\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v})\}$ est elle l'interprétation de $\lambda b.\,\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ \mathtt{v}\ \mathtt{else}\ \mathtt{v})\ \mathtt{else}\ (\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ \mathtt{v}\ \mathtt{else}\ \mathtt{v})$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que f est bien un morphisme de $!\mathbf{bool}\otimes!\mathbf{bool}$ vers **bool** dans $\mathbf{NCOH}_{\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}$. Le reste s'en déduit en utilisant le foncteur d'oubli $U_{\mathbb{N}\backslash\{0,1\},K}$ et le corollaire 6.18. □

6.4 Sémantiques non-uniformes et sémantiques uniformes

Définition 6.21.
Pour chaque $K\subseteq\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, soit $\mathbf{NCoh}_K$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{NCOH}_K$ dont les objets sont les espaces K-cohérents X de $\mathbf{NCOH}_K$ tels que :

$$\mathsf{N}_X\subseteq\cup_{a\in|X|}\mathcal{M}_K\{a\}. \tag{6.8}$$

Cette catégorie $\mathbf{NCoh}_K$ est clairement close pour les constructions sur les objets orthogonal, *avec*, plus, tenseur et *par*. On vérifie facilement que c'est encore le cas pour la construction *bien sûr*. En effet, supposons que X est un objet de $\mathbf{NCoh}_K$ et soit un multi-ensemble $[x_i\mid i\in I]$ neutre dans $!X$. Alors il existe une famille $(a_i^j)_{i\in I}^{1\le j\le p}$ telle que, pour chaque $i\in I$, $x_i=[a_i^j\mid 1\le j\le p]$ et, pour chaque j tel que $1\le j\le p$, $[a_i^j\mid i\in I]\in\mathsf{N}_X$. En utilisant la propriété (6.8) pour X, nous obtenons qu'il existe une famille $(a^j)_{1\le j\le p}$ telle que $a_i^j=a^j(\forall i,j)$ et en conséquent tous les x_i sont égaux.

Théorème 6.22. *Pour chaque $K\subseteq\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, la catégorie $\mathbf{NCoh}_K$ équipée de la structure logique de $\mathbf{NCOH}_K$ (de* bien sûr !*) est un modèle de* LL *dont l'exponentielle est encore libre.*

Démonstration. On a vérifié la stabilité de $\mathbf{NCoh}_K$ par toutes les constructions logiques de $\mathbf{NCOH}_K$. Les constantes 0, $\top$, 1 et $\perp$ sont des éléments de $\mathbf{NCoh}_K$. Et comme $\mathbf{NCoh}_K$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{NCOH}_K$, $\mathbf{NCoh}_K$ est bien un modèle dénotationnel de la logique linéaire pour les mêmes constructions sur les objets et les morphismes que celles qui équipent le modèle de LL dans $\mathbf{NCOH}_K$. La preuve du théorème 6.17 est encore une preuve de ce que l'exponentielle de $\mathbf{NCoh}_K$ est libre. □

Remarque 6.23. Les objets de $\mathbf{NCoh}_K$ sont des espaces de $\mathcal{M}_K$-cohérence *déterministes*.[3]

Rappelons que le déterminisme d'un espace de P-cohérence implique que l'intersection d'une clique et d'une anti-clique de cet espace contient au plus un point. On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.24. *Dans le modèle relationnel de* LL $+$démon$+$divergence$+$Mix*, pour chaque formule A, l'interprétation de toute preuve de A et l'interprétation de toute preuve de $A^\perp$ s'intersectent en au plus un point.*

Pour autant, tout point de l'interprétation relationnelle d'une formule n'est pas l'intersection d'une clique et d'une anti-clique de son interprétation dans $\mathbf{NCoh}_K$. Nous pouvons facilement caractériser les points de rencontre d'une clique et d'une anti-clique comme l'ensemble des points de la trame dont la puissance est entièrement neutre. Dans le cadre des espaces K-cohérents nous appelons cet ensemble la *trame neutre*.

[3]Mais la propriété (6.8) est strictement plus forte que le déterminisme.

Définition 6.25 (trame neutre). Soit $X \in \mathbf{NCoh}_K$. La *trame neutre* de X, notée $|X|_{\mathsf{N},K}$ (ou encore $|X|_{\mathsf{N}}$), est l'ensemble $\{a \in |X| \mid \mathcal{M}_K(\{a\}) \subseteq \mathsf{N}_X\}$.

Exemple 6.26. L'espace K-cohérent G de l'exemple 6.14 page 129 est un objet de $\mathbf{NCoh}_K$. Et nous avons : $[a, b] \in |!G|_{\mathsf{N},K}$, si $K \subseteq \{2\}$, $[a, b, c] \in |!G|_{\mathsf{N},K}$ et sinon $[a, b, c] \notin |!G|_{\mathsf{N},K}$.

Un résultat clé concernant la trame uniforme est sa *bonne sociabilité* avec le *bien sûr*.

Lemme 6.27 (lemme clé). *Pour $X \in \mathbf{NCoh}_K$ on a*

$$|!X|_{\mathsf{N},K} = \{x \in \mathcal{M}_{\mathit{fin}}(|X|_{\mathsf{N},K}) \mid \mathrm{supp}(x) \in \mathrm{Cl}(X)\}$$

Démonstration. Soit $x \in |!X|_{\mathsf{N},K}$. Alors pour chaque $k \in K$, il existe une famille $(a_i^j)_{1 \le i \le k}^{j \in J}$ telle que $[a_i^j \mid j \in J] = x$ et, pour chaque $j \in J$, $[a_i^j \mid 1 \le i \le k] \in \mathsf{N}_X$. Par la propriété (6.8), pour chaque $j \in J$, $a_1^j = \ldots = a_k^j$. Donc pour chaque $k \in K$, pour chaque $a \in x$, $k.[a]$ est neutre dans X. Donc $\mathrm{supp}(x) \subseteq |X|_{\mathsf{N},K}$. Chaque $y \in \mathcal{M}_K(\mathrm{supp}(x))$ est une multi-section du multi-ensemble $(\sharp y).[x] \in \mathsf{N}_{!X} \subseteq \frown_{!X}$, donc $\mathrm{supp}(x)$ est une clique. Ceci prouve que $|!X|_{\mathsf{N},K}$ est un sous-ensemble de $\{x \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|_{\mathsf{N},K}) \mid \mathrm{supp}(x) \in \mathrm{Cl}(X)\}$. Réciproquement, soit $x \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|_{\mathsf{N},K})$ tel que $\mathrm{supp}(x)$ est une clique de X. Alors $k.[x] \in \frown_{!X}$ pour chaque $k \in K$. De plus chaque élément a de x est tel que, pour chaque $k \in K$, $k.[a] \in \mathsf{N}_X$ donc $k.[x] \in \frown_{!X}$, pour chaque $k \in K$. Donc $x \in |!X|_{\mathsf{N},K}$. □

Exemple 6.28. Dans $(!G)^\perp$, l'ensemble $x = \{[a, b], [a, c]\} \subseteq |(!G)^\perp|_{\mathsf{N},K}$ n'est pas une clique si $2 \in K$ mais est une clique si $2 \notin K$. Donc $[[a, b], [a, c]]$ n'est pas un élément de $|!(!G)^\perp|_{\mathsf{N},\{2\}}$ mais est un élément de $|!(!G)^\perp|_{\mathsf{N},\{3\}}$.

Le lemme 6.27 a de nombreuses conséquences.

Définition 6.29. Soit $X \in \mathbf{NCoh}_K$. La *restriction neutre* de X est le sous-espace de X de trame $|X|_{\mathsf{N}}$, c'est à dire l'espace K-cohérent réflexif $(|X|_{\mathsf{N}}, \mathsf{N}_X \cap M, \frown_X \cap M, \smile_X \cap M)$ où $M = \mathcal{M}_K(|X|_{\mathsf{N}})$. La restriction neutre d'une clique x de X est $x \cap |X|_{\mathsf{N}}$. Le foncteur $N_K : \mathbf{NCoh}_K \to \mathbf{NCoh}_K$, parfois noté simplement N, est celui qui associe aux objets et aux morphismes leur restriction neutre.

Vérifier que N_K est bien un foncteur et que $N_K(X)$ est bien un espace réflexif est direct.

Lemme 6.30. *Le foncteur N_K commute avec toutes les constructions additives et multiplicatives et avec l'orthogonal. De plus $N_K! = N_K!N_K$.*

Démonstration. La première partie du lemme est directe.

Sur les objets, $N_K! = N_K!N_K$ est une conséquence du lemme 6.27. En effet, dans l'égalité

$$|!X|_{\mathsf{N},K} = \{x \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|_{\mathsf{N},K}) \mid \mathrm{supp}(x) \in \mathrm{Cl}(X)\}$$

établie par ce lemme, $\mathrm{Cl}(X)$ peut être remplacé par $\mathrm{Cl}(N_K X)$, puisque $\mathrm{supp}(x) \subseteq |X|_{\mathsf{N},K}$. Cela donne directement $|!X|_{\mathsf{N},K} = |!N_K X|_{\mathsf{N},K}$. L'égalité $N_K! = N_K!N_K$ sur les morphismes est une conséquence directe de l'égalité sur les objets. □

Les espaces K-cohérents réflexifs sont exactement les espaces K-cohérents réflexifs dont la trame est égale à la trame neutre. Ces espaces forment une sous-catégorie de $\mathbf{NCoh}_K$.

Définition 6.31. Soit $K \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Un *espace K-cohérent uniforme* est simplement un espace K-cohérent réflexif, c'est à dire tel que $\mathsf{N}_X = \cup_{a \in |X|} \mathcal{M}_K(\{a\})$. Nous notons $\mathbf{Coh}_K$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{NCoh}_K$ (et de $\mathbf{NCOH}_K$) dont les objets sont les espaces K-cohérents uniformes.

Rappelons que dans dans un espace de P-cohérence, donc en particulier dans un espace K-cohérent uniforme X, chacune des relations $\bigcirc_X$, $\frown_X$, $\asymp_X$, $\smile_X$ détermine toute la structure de l'espace. Un espace $\{2\}$-cohérent uniforme est juste un espace de cohérence ordinaire.

Le foncteur N_K envoie $\mathbf{NCoh}_K$ sur $\mathbf{Coh}_K$ et sur $\mathbf{Coh}_K$, N_K agit comme le foncteur identité.

les constructions additives et multiplicatives de $\mathbf{NCoh}_K$, ainsi que l'orthogonal, préservent l'uniformité des espaces K-cohérents. Ce n'est pas le cas pour le foncteur *bien sûr*. Le lemme 6.27 donne une idée précise de la manière de définir une exponentielle uniforme qui soit un foncteur dans $\mathbf{Coh}_K$.

Définition 6.32. On définit un foncteur *bien sûr* dans $\mathbf{Coh}_K$, noté $\underset{u}{!}$, en posant $\underset{u}{!} = N_K!$. On note $\underset{u}{?}$ le foncteur *pourquoi pas* associé.

La trame de $\underset{u}{!}\, X$ est alors

$$|\underset{u}{!}\, X| = \{x \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|) \mid \text{supp}(X) \in \text{Cl}(X)\}$$

et la cohérence de $\underset{u}{!}\, X$ est donnée par :

$$M \in \bigcirc_{\underset{u}{!}\, X} \text{ ssi } \{m \mid m \lhd M\} \subseteq \bigcirc_X .$$

Cette définition des exponentielles se présente comme une version sensible aux multiplicités des exponentielles hypercohérentes introduites dans [Ehr93].

Le théorème 6.33 établit que cette définition donne naissance à de nouveaux modèles uniformes ainsi qu'à un moyen très direct d'obtenir l'interprétation uniforme d'une formule ou d'une preuve dans l'un de ces modèles à partir de l'interprétation non-uniforme correspondante.

Théorème 6.33. *Pour chaque $K \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\mathbf{Coh}_K$ équipée des exponentielles uniformes et de la structure multiplicative-additive standard est un modèle catégorique de la logique linéaire. De plus :*

1. *pour toute formule A de la logique linéaire, la* restriction neutre *de l'espace K-cohérent $[A]_K$ est l'interprétation K-cohérente uniforme $[A]_K^u$ de la formule A ; et, pour toute preuve π, la restriction neutre de l'interprétation K-cohérente $[\pi]_K$ de π est l'interprétation K-cohérente uniforme $[\pi]_K^u$ de π.*
2. *L'exponentielle de $\mathbf{Coh}_K$ est libre.*
3. *Le modèle $\mathbf{Coh}_{\{2\}}$ est exactement le modèle cohérent multi-ensembliste standard.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathbf{Coh}_K$ est un modèle de la logique linéaire il reste uniquement à équiper $\underset{u}{!}$ d'une structure de comonade $(\underset{u}{!}, \text{der}_u, \text{dig}_u)$ sur $\mathbf{Coh}_K$ telle que l'adjonction associée soit monoïdale (voir [Bie95]). Ceci fournira notamment les isomorphismes (naturels) $\underset{u}{!}\top \cong 1$ et $\underset{u}{!}(A \mathbin{\&} B) \cong \underset{u}{!}\, A \otimes \underset{u}{!}\, B$. Pour montrer le point 1 de la seconde partie du théorème il suffit de montrer que : pour toute *construction* catégorique $C(\cdot, \ldots, \cdot)$ sur les objets ou les morphismes utilisée pour l'interprétation des formules ou des preuves dans une catégorie $*_l$-autonome (voir [AC98]), si $C(\cdot, \ldots, \cdot)$ est la construction correspondante dans $\mathbf{NCoh}_K$ et si $C_u(\cdot, \ldots, \cdot)$ est la construction correspondante dans $\mathbf{Coh}_K$ alors

$$NC(\cdot, \ldots, \cdot) = C_u(N(\cdot), \ldots, N(\cdot)).$$

Or, pour ce qui est de la structure multiplicative-additive (commune) de $\mathbf{NCoh}_K$ et $\mathbf{Coh}_K$, nous avons déjà $NC(\cdot, \ldots, \cdot) = C_u(N(\cdot), \ldots, N(\cdot))$. Nous avons aussi $N! = \underset{u}{!}\, N$ (lemme 6.30).

Donc, si nous montrons que $(\underset{u}{!}, N\,\text{der}, N\,\text{dig})$ est bien un structure de comonade sur $\mathbf{Coh}_K$, que $N!\top \cong 1$ et que, pour chaque paire d'objets X, Y de $\mathbf{NCoh}_K$, $N!(X \mathbin{\&} Y) \cong N!X \otimes N!Y$ nous aurons alors montré, d'une part, que $\mathbf{Coh}_K$ est bien un modèle catégorique de LL et, d'autre part, le point 1 de la seconde partie du théorème. (La monoïdalité de l'adjonction induite par la comonade $(\underset{u}{!}, N\,\mathrm{der}, N\,\mathrm{dig})$ sera alors conséquence de la monoïdalité de l'adjonction induite par la comonade $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$). C'est ce que nous faisons maintenant.

Nous posons donc $\mathrm{der}_{u,X} = N(\mathrm{der}_X)$ et $\mathrm{dig}_{u,X} = N(\mathrm{dig}_X)$ pour chaque $X \in \mathbf{Coh}_K$. Nous obtenons ainsi deux transformations naturelles $\mathrm{der}_u : N! \stackrel{\cdot}{\to} N\,\mathrm{id}$ et $\mathrm{dig}_u : N! \stackrel{\cdot}{\to} N!!$ dans $\mathbf{Coh}_K$.

Mais N est le foncteur identité sur $\mathbf{Coh}_K$, dans $\mathbf{Coh}_K$, $N! = \underset{u}{!}$ et $N! = N!N$ (lemme 6.30). Ceci donne $N!! = \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}$, et $N!!! = \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}\,\underset{u}{!}$, dans $\mathbf{Coh}_K$. Donc der_u et dig_u sont en fait des transformations naturelles $\mathrm{der}_u : \underset{u}{!} \stackrel{\cdot}{\to} \mathrm{id}$ et $\mathrm{dig}_u : \underset{u}{!} \stackrel{\cdot}{\to} \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}$.

Nous déduisons de la structure de comonade $(!, \mathrm{der}, \mathrm{dig})$ de $\mathbf{NCoh}_K$ les commutations de diagrammes requises pour que $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u, \mathrm{dig}_u)$ soit une comonade. Ce faisant, la seule étape non triviale est de montrer que, pour chaque $X \in \mathbf{Coh}_K$, $N\,\mathrm{dig}_{!X} = \mathrm{dig}_{u,\underset{u}{!}X}$ et $N\,\mathrm{der}_{!X} = \mathrm{der}_{u,\underset{u}{!}X}$.

$$
\begin{tikzcd}
!X \arrow[r, "\mathrm{dig}_X"] \arrow[dr, "I_{!X}"'] & !!X \arrow[d, "!\,\mathrm{der}_X"] \\
& !X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X \arrow[r, "\mathrm{dig}_X"] \arrow[dr, "I_{!X}"'] & !!X \arrow[d, "\mathrm{der}_{!X}"] \\
& !X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
!X \arrow[r, "\mathrm{dig}_X"] \arrow[d, "\mathrm{dig}_X"'] & !!X \arrow[d, "!\,\mathrm{dig}_X"] \\
!!X \arrow[r, "\mathrm{dig}_{!X}"'] & !!!X
\end{tikzcd}
$$

$$N$$

$$
\begin{tikzcd}
\underset{u}{!}X \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,X}"] \arrow[dr, "I_{\underset{u}{!}X}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X \arrow[d, "\underset{u}{!}\,\mathrm{der}_{u,X}"] \\
& \underset{u}{!}X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underset{u}{!}X \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,X}"] \arrow[dr, "I_{\underset{u}{!}X}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X \arrow[d, "\mathrm{der}_{u,\underset{u}{!}X}"] \\
& \underset{u}{!}X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underset{u}{!}X \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,X}"] \arrow[d, "\mathrm{dig}_{u,X}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X \arrow[d, "\underset{u}{!}\,\mathrm{dig}_{u,X}"] \\
\underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X \arrow[r, "\mathrm{dig}_{u,\underset{u}{!}X}"'] & \underset{u}{!}\,\underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X
\end{tikzcd}
$$

Cela se fait de la manière suivante. Pour chaque $f \in \mathbf{NCoh}_K(N!X, !X)$, on a $!f \mathbin{;} \mathrm{dig}_{!X} = \mathrm{dig}_{N!X} \mathbin{;} f$ donc $N(!f \mathbin{;} \mathrm{dig}_{!X}) = N(\mathrm{dig}_{!N!X} \mathbin{;} f)$ et ainsi $N!f \mathbin{;} N\,\mathrm{dig}_{!X} = N(\mathrm{dig}_{N!X}) \mathbin{;} Nf$. L'ensemble $\mathrm{id}_{N!X}$ peut être vu comme le morphisme inclusion i de de $N!X$ dans $!X$. On obtient alors les égalités *d'ensembles* $N!i = \mathrm{id}_{\underset{u}{!}\,\underset{u}{!}X}$ et $Ni = \mathrm{id}_{\underset{u}{!}X}$. Donc, en prenant $f = i$ dans l'égalité $N!f \mathbin{;} N\,\mathrm{dig}_{!X} = N(\mathrm{dig}_{N!X}) \mathbin{;} Nf$, on obtient l'égalité d'ensemble $N\,\mathrm{dig}_{!X} = N\,\mathrm{dig}_{N!X}$, c'est à dire finalement $N\,\mathrm{dig}_{!X} = \mathrm{dig}_{u,\underset{u}{!}X}$. En partant de l'égalité $N(\mathrm{der}_{!X} \mathbin{;} i) = N(!i \mathbin{;} \mathrm{der}_{!X})$, on prouve $N\,\mathrm{der}_{!X} = \mathrm{der}_{u,\underset{u}{!}X}$ de la même façon.

La structure de $\otimes$-comonoïde commutatif associée à $\underset{u}{!}$ dans $\mathbf{Coh}_K$ est alors l'image par le foncteur N de la structure de $\otimes$-comonoïde commutatif associée à $!$ dans $\mathbf{NCoh}_K$. Le fait que $(\underset{u}{!}, \mathrm{der}_u)$ est co-libre tient essentiellement dans l'égalité $\mathrm{der}_{u,X} = \mathrm{der}_X$ ($\forall X \in \mathbf{Coh}_K$). En effet, soit (A, u_A, μ_A) un $\otimes$-comonoïde commutatif de $\mathbf{Coh}_K$ et soit $f \in \mathbf{Coh}_K(A, X)$. On a $N(f_*) \mathbin{;} \mathrm{der}_{u,X} = N(f_* \mathbin{;} \mathrm{der}_X)$, où f_* est l'unique morphisme de comonoïde commutatif de $\mathbf{NCoh}_K(A, !X)$ tel que $f_* \mathbin{;} \mathrm{der}_X = f$. On a alors que $N(f_*) : A \to \underset{u}{!}X$ est un morphisme de comonoïde commutatif. Par ailleurs le morphisme inclusion $i : \underset{u}{!}X \to !X$ est aussi un morphisme de comonoïde commutatif. Comme ces morphismes de comonoïde se composent, $N(f_*) \mathbin{;} i : A \to !X$ est encore un morphisme de comonoïde commutatif. On a alors les égalités d'ensemble $N(f_*) \mathbin{;} i = N(f_*)$ et, par $\mathrm{der}_X = \mathrm{der}_{u,X}$, $N(f_*) \mathbin{;} i \mathbin{;} \mathrm{der}_X = N(f_*) \mathbin{;} \mathrm{der}_{u,X} = f$. Par unicité de f_*, c'est que $N(f_*) \mathbin{;} i = f_*$. Nous obtenons alors l'égalité d'ensemble $f_* = N(f_*)$, et le fait que $\underset{u}{!}$ est co-libre en découle.

Soit $X \in \mathbf{Coh}_{\{2\}}$. Alors $[x, y] \in \frown_{\underset{u}{!} X}$ ssi $\forall a \in x, \forall b \in y, [a, b] \in \frown_X$, c'est à dire ssi $\mathrm{supp}(x + y)$ est une clique. Donc dans $\mathbf{Coh}_{\{2\}}$ qui est la catégorie des espaces de cohérence standard, $\underset{u}{!}$ est la construction standard du *bien sûr* multi-ensembliste. On montre sans difficulté que la structure de comonade de $\underset{u}{!}$ est aussi la structure standard et que les constructions multiplicatives-additives sont aussi les constructions standards. $\square$

Définition 6.34 (multicohérence). Nous appelons *multicohérences*[4] les objets de $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$. Et nous appelons *multicohérences non-uniformes* les objets de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$. Nous parlons alors du modèle multicohérent (dans $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$) et du modèle multicohérent non-uniforme (dans $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$).

La seule différence entre les multicohérences et le hypercohérences est que dans les multicohérences les multiplicités sont prises en compte par la relation de cohérence.

6.4.1 Hypercohérences non-uniformes

Les hypercohérences peuvent être vues comme des multicohérences où la cohérence d'un multi-ensemble ne dépend que de son support. Ceci nous permet de considérer la catégorie des hypercohérences comme une sous catégorie pleine des multicohérences, où la structure multiplicative additive est la même que celle des multicohérences. Nous généralisons ce point de vue en considérant des hypercohérences non-uniformes.

Définition 6.35 (hypercohérence non-uniforme). Dans $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, une hypercohérence non-uniforme est une multicohérence non-uniforme $X = (|X|, \frown, \asymp)$ qui vérifie

$$\frown = \mathrm{supp}^{-1}(\mathrm{supp}(\frown_X)) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|) \text{ et}$$
$$\asymp = \mathrm{supp}^{-1}(\mathrm{supp}(\asymp_X)) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|).$$

Remarque 6.36. Une hypercohérence non-uniforme X est donc un espace de $\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}$-cohérence $(|X|, \Gamma, \Gamma^\perp)$, déterministe ($\Gamma \cap \Gamma^\perp \subseteq \{\{a\} \mid a \in |X|\}$) vue ici par commodité comme un espace de $\mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$-cohérence $(|X|, \mathrm{supp}^{-1}(\Gamma) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|), \mathrm{supp}^{-1}(\Gamma^\perp) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|))$ vérifiant la propriété (6.8). Dans cette section, nous disons que $(|X|, \Gamma, \Gamma^\perp)$ est l'espace de $\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}$-cohérence sous-jacent de X.

Dans ce cadre, une hypercohérence est juste une multicohérence $X = (|X|, \frown_X, \asymp_X)$ telle que $\frown = \mathrm{supp}^{-1}(\mathrm{supp}(\frown_X)) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.

Les hypercohérences et les hypercohérences non-uniformes définissent des sous catégories pleines de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, notées respectivement $\mathbf{Hc}$ et $\mathbf{NHc}$. De plus $\mathbf{Hc}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ et la structure multiplicative-additive induite par celle de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ est la même que la structure multiplicative additive standard du modèle hypercohérent.

On définit une opération S sur les objets de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ comme suit. Si X est une multicohérence non-uniforme, alors SX est une hypercohérence non-uniforme de trame celle de X et telle que si $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|)$, alors

$$\mu \in \frown_{SX} \text{ ssi } \{u \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|) \mid \mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}(\mu)\} \subseteq \frown_X \quad \text{et}$$
$$\mu \in \mathsf{N}_{SX} \text{ ssi } \{u \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|X|) \mid \mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}(\mu)\} \subseteq \mathsf{N}_X.$$

On a donc $\smile_{SX} = \mathrm{supp}^{-1}(\mathrm{supp}(\smile_X)) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.

On vérifie facilement que si X est une multicohérence non-uniforme, alors SX est une hypercohérence non-uniforme et que, si X est une multicohérence, alors SX est une hypercohérence. De plus, si X est une hypercohérence non-uniforme, alors $SX = X$.

Dans la remarque 3.54, nous citons l'existence d'une version multi-ensembliste des exponentielles dont nous ne décrivons que l'action sur les objets du *bien sûr* qui lui est associé.

[4] La théorie des graphes ne fournit pas d'appellation pour ces graphes, et contrairement à la situation des hypercohérences qui sont des hypergraphes, les multigraphes existent mais ne sont pas des multicohérences.

C'est au cours d'une discussion avec A. Bruasse-Bac que nous avons découvert cette version de l'exponentielle et que nous avons montré que cette exponentielle est libre dans la catégorie des hypercohérences. À notre connaissance l'existence d'une version multi-ensembliste des exponentielles n'avait pas été explorée avant. Nous rappelons la définition de son *bien sûr*, $\underset{mh}{!}$, dans la catégorie $\mathbf{Hc}$.

Définition 6.37. Le foncteur $\underset{mh}{!}$ de $\mathbf{Hc}$ dans $\mathbf{Hc}$ est défini comme suit. Si X est une hypercohérence alors $\underset{mh}{!}X$ est l'hypercohérence de trame $\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(X) \mid \text{supp}(\mu) \in \text{Cl}(X)\}$ et telle que si $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(|\underset{mh}{!}X|)$ alors $\mu \in \smile_{\underset{mh}{!}X}$ ssi il existe un élément s de $\smile_X$ tel que

$$\forall x \in \mu, \exists a \in s, a \in x$$
$$\forall a \in x, \exists x \in \mu, a \in x.$$

Si f est un morphisme de $\mathbf{Hc}(X, Y)$ alors

$$\underset{mh}{!}f = \{([a_i \mid i \in I], [b_i \mid i \in I]) \mid \sharp I \in \mathbb{N}, (\forall i \in I, (a_i, b_i) \in f),$$
$$\{a_i \mid i \in I\} \in \text{Cl}(X) \text{ et } \{b_i \mid i \in I\} \in \text{Cl}(Y)\}.$$

Remarque 6.38. Sur les objets de $\mathbf{Hc}$, l'opération $S\underset{u}{!}$ agit comme le *bien sûr* multi-ensembliste $\underset{mh}{!}$ des hypercohérences. De plus, $\underset{u}{!}$ et $\underset{mh}{!}$ ont la même action sur les morphismes de $\mathbf{Hc}$. On étend alors l'opération S aux morphismes de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$. On a alors $S\underset{u}{!} = \underset{mh}{!}$ (dans $\mathbf{Hc}$). Pour autant, l'opération S n'est pas un foncteur.

La première partie de la remarque qui établit que $S\underset{u}{!} = \underset{mh}{!}$ sur les objets et les morphismes se vérifie facilement. Nous montrons sur un exemple pourquoi S n'est pas un foncteur (de $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ dans $\mathbf{Hc}$, *a fortiori* de $\mathbf{NCoh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ dans $\mathbf{NHc}$).

Exemple 6.39. L'espace G de l'exemple 6.14 est une hypercohérence. Soit Y la multicohérence donnée par $|Y| = \{b_1, b_2\}$ et $\smile [Y] = \{[b_1, b_2]\}$. Et soit un sous-ensemble $f = \{(a, b_1), (b, b_1), (c, c_2)\}$ de $|G \multimap Y|$. Alors f est un morphisme de $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(X, Y)$ mais $Sf = f$ n'est pas un morphisme de $\mathbf{Hc}(SG, SY)$. En effet, on vérifie facilement que f est une clique de $G \multimap Y$ et que f n'est pas une clique de $SG \multimap SY$, puisque, comme $\frown_{SY} = \emptyset$ et $[a, b, c] \in \frown_{SG}$, $[(a, b_1), (b, b_1), (c, b_2)] \in \smile_{SG \multimap SY}$.

L'égalité $S\underset{u}{!} = \underset{mh}{!}$ dans $\mathbf{Hc}$ suggère la définition d'une exponentielle non-uniforme dans $\mathbf{NHc}$. Nous prenons donc comme *bien sûr* non-uniforme sur $\mathbf{NHc}$, l'opération $S!$.

L'action de cette opération sur les morphismes est claire (c'est celle du *bien sûr* du modèle relationnel). Nous décrivons son action sur les objets en nous référant aux espaces de $\mathcal{P}^*_{\text{fin}}$-cohérence déterministes sous-jacents. Si X est une hypercohérence non-uniforme d'espace de $\mathcal{P}_{\text{fin}}$-cohérence sous-jacent $(X, \Gamma(X), \Gamma^\perp(X))$, alors $S!X$ est l'hypercohérence non-uniforme d'espace de $\mathcal{P}^*_{\text{fin}}$-cohérence sous-jacent $(|SX|, \Gamma(S!X), \Gamma^\perp(S!X))$ dont la trame est $|SX| = \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|)$ et donc la cohérence est déterminée par :

$$\Gamma^{\perp*}(S!X) = \{u \in \mathcal{P}^*_{\text{fin}}(|X|) \mid \exists s \in \Gamma^{\perp*}(X), s \lhd u\}$$
$$\Gamma(S!X) \cap \Gamma^\perp(S!X) = \{\{\mu\} \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{fin}}(|X|_{\mathsf{N}}) \text{ et } \text{supp}(\mu) \in \text{Cl}(X)\}.$$

Théorème 6.40.

1. *La catégorie* $\mathbf{NHc}$ *équipée du* bien sûr $S!$ *est un modèle de la logique linéaire pour lequel le foncteur d'oubli* U *dans la catégorie des relations est logique.*
2. *Le foncteur* N *de* $\mathbf{NHc}$ *équipée de* $S!$ *dans* $\mathbf{Hc}$*, équipée de* $\underset{mh}{!}$ *est logique.*
3. *Les exponentielles* $S!$ *et* $S\underset{u}{!}$ *sont respectivement libres dans* $\mathbf{NHc}$ *et* $\mathbf{Hc}$*.*

La preuve de ce théorème consiste en une adaptation des preuves de la proposition 6.15, du théorème 6.17 et du théorème 6.33. Un partie de la preuve peut se dériver simplement de ces trois résultats, en remarquant que pour chaque multicohérence non-uniforme X on a $S!X = S!SX$ et $NSX = SNX$.

Remarque 6.41. Le corollaire 6.18 s'applique à $S!$ et à $S\underset{u}{!}$, et le résultat négatif du corollaire 6.19 s'applique à $S!$.

6.4.2 Collapses extensionnels

Comme pour la sémantique hypercohérente, la sémantique multicohérente admet une structure exponentielle ensembliste.

Son foncteur *bien sûr*, noté $\underset{e}{!}$ est définit comme suit. Si X est une multicohérence alors $\underset{e}{!}X$ est la multicohérence de trame $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ et de cohérence donnée par $\mu \in \smile_{\underset{e}{!}X}$ ssi il existe une multi-section strictement incohérente de μ. Si f est un morphisme de $\mathbf{Coh}_{\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}(X,Y)$ alors

$$\underset{e}{!}f = \{(\{a_i \mid i \in I\}, \{b_i \mid i \in I\}) \in |\underset{e}{!}X \multimap \underset{e}{!}Y| \mid \sharp I \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in I, (a_i, b_i) \in f\}.$$

La structure de comonade est similaire à celle des hypercohérences ensemblistes et $S\underset{e}{!}$ est le *bien sûr* ensembliste des hypercohérences.

Théorème 6.42.

1. *Le modèle des hypercohérences non-uniformes et le modèle multi-ensembliste des hypercohérences définissent le même collapse extensionnel.*
2. *Pour tout $K \subseteq \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, le modèle $\mathbf{NCoh}_K$ et le modèle $\mathbf{Coh}_K$ définissent le même collapse extensionnel. En particulier, le modèle des espaces de cohérence non-uniforme et le modèle multi-ensembliste des espaces de cohérence définissent le même collapse extensionnel, et le modèle des multicohérences non-uniforme et le modèle multi-ensembliste des multicohérences définissent le même collapse extensionnel.*
3. *Le collapse extensionnel du modèle multi-ensembliste des espaces de cohérence est le modèle ensembliste des espaces de cohérence.*
4. *Le collapse extensionnel du modèle multi-ensembliste des multicohérences est le modèle ensembliste des multicohérences.*
5. *Le collapse extensionnel du modèle multi-ensembliste des hypercohérences est le modèle ensembliste des hypercohérences.*

Ce théorème se prouve en cinq applications du critère de Melliès tel qu'énoncé dans le théorème 2.1. Pour prouver les deux premiers points on définit dans les deux cas les deux familles de morphismes θ et ζ en posant l'égalité d'ensembles $\theta_X = \zeta_X = \underset{u}{!}I_X$. Pour prouver les trois derniers points on définit dans les trois cas la famille θ de morphismes $\theta_X : \underset{e}{!}X \to \underset{u}{!}X$ en posant $\theta_X = \{(\text{supp}(\mu), \mu) \mid \mu \in |\underset{u}{!}X|\}$ et la famille ζ de morphismes $\zeta_X : \underset{u}{!}X \multimap \underset{e}{!}X$ en posant $\zeta_X = \{([a_i \mid i \in I], \{a_i \mid i \in I\}) \mid \{a_i \mid i \in I\} \in |\underset{e}{!}X|\}$. Les commutations de diagrammes requises sont alors faciles. On conclut en remarquant que les modèles ensemblistes cohérent, multicohérent et hypercohérent sont tels que la relation d'équivalence extensionnelle est à chaque fois l'égalité.

6.4.3 Séquentialité d'ordre supérieur

Du point de vue des modèles, la seule différence entre le modèle hypercohérent et le modèle multicohérent réside dans l'interprétation des exponentielles.

L'interprétation hypercohérente du type de base des booléen et son interprétation multicohérente coïncident. C'est l'espace **bool** de trame $\{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$ et dont l'incohérence stricte est l'ensemble des multi-ensembles finis dont le support est égal à $\{\mathtt{v}, \mathtt{f}\}$.

Les espaces $\underset{e}{!}\,\mathbf{bool}$, et $S\underset{e}{!}\,\mathbf{bool}$ sont aussi égaux et il en va encore de même des espaces $\underset{e}{!}(\mathbf{bool}\ \&\ \ldots\ \&\ \mathbf{bool}) \multimap \mathbf{bool}$ et $S\underset{e}{!}(\mathbf{bool}\ \&\ \ldots\ \&\ \mathbf{bool}) \multimap \mathbf{bool}$.

On en déduit la proposition suivante, vraie dans les hypercohérences ([Ehr99]).

Proposition 6.43 (sous-définissabilité). *dans le modèle multicohérent ensembliste toute clique de* $\underset{u}{!}(\boldsymbol{bool}\ \&\ \ldots\ \&\ \boldsymbol{bool}) \multimap \boldsymbol{bool}$ *est sous-définissable dans* PCF.

Cette proposition montre que, sur les types simples avec comme unique type de base le type des booléens, le modèle des multicohérences capture la notion (syntaxique) de séquentialité à l'ordre 1.

Nous montrons maintenant par un exemple que les modèles multicohérents ensemblistes et hypercohérents ensemblistes ne définissent pas les mêmes ensembles de cliques sur les types simples.

Exemple 6.44. Pour l'hypercohérence G des derniers exemples, on a que $\{a, b\}$ et $\{c\}$ sont des éléments de $|\underset{e}{!}\,G| = |S\underset{e}{!}\,G|$. De plus $(\{a, b\}, \mathtt{v})$ et $(\{c\}, \mathtt{f})$ sont des éléments de $|\underset{e}{!}\,G \multimap \mathbf{bool}| = |S(\underset{e}{!}\,G) \multimap \mathbf{bool}|$. La relation $F = \{(\{a, b\}, \mathtt{v}), (\{c\}, \mathtt{f})\}$ est une clique de l'hypercohérence $S(\underset{e}{!}\,G) \multimap \mathbf{bool}$ mais F n'est pas une clique de la multicohérence $\underset{e}{!}\,G \multimap \mathbf{bool}$ puisque $[\{a, b\}, \{c\}]$ est cohérent mais $[\mathtt{v}, \mathtt{f}]$ est strictement incohérent.

Comme G est un sous-espace de l'interprétation de $(\mathbf{bool} \times \mathbf{bool} \times \mathbf{bool}) \to \mathbf{bool}$, l'exemple précédent montre qu'il existe un type simple dans l'interprétation duquel il existe un ensemble de points de la trame qui est une clique pour les hypercohérences et qui n'est pas une clique pour les multicohérences. Nous ne connaissons pas d'exemple de type simple pour lequel on ait, à l'inverse, un ensemble de points qui soit une clique pour les multicohérences mais pas une clique pour les hypercohérences.

Il n'y a, a priori, pas de notion syntaxique de ce qu'est la séquentialité à un ordre supérieur et c'est la sémantique qui fournit une telle notion. Dans [Lon02], J. Longley travaille sur l'hypothèse que, dans la hiérarchie des types simples, il y a une unique notion sémantique de séquentialité d'ordre supérieur, à extensionnalité près. Le fait que les modèles multicohérents ensemblistes et hypercohérents ensemblistes capturent tous deux la notion de séquentialité à l'ordre 1 (proposition 6.43), mais ne définissent pas les mêmes ensembles de cliques sur les types simples, nous semble plaider contre cette hypothèse.

CHAPITRE 7

Conclusion et Perspectives

L'objectif poursuivi dans cette thèse était d'établir une comparaison fine entre les jeux et les hypercohérences, qui fournisse notamment une anatomie du résultat de collapse extensionnel obtenu par T. Ehrhard dans [Ehr99].

Dans cette direction, nous avons découvert qu'une opération de reconstruction du temps dans les hypercohérences, le déploiement en tours, suggérait la définition d'une sémantique de *jeux à bord* pour la logique linéaire polarisée. Nous avons montré l'existence d'une telle sémantique. Nous avons alors obtenu un résultat de projection de cette sémantique sur la sémantique hypercohérente. Mais ce résultat est pour l'instant limité à un cadre sans exponentielles. Par ailleurs, le déploiement en tours suggérait l'utilisation de la construction exponentielle des algorithmes séquentiels pour le modèle de jeux. Mais ce n'est pas la structure exponentielle dont nous avons équipé notre modèle de jeux à bord. Toutefois, les résultats de déploiement sont principalement à valeur heuristique et, d'autre part, il n'est pas exclu qu'il y ait des modèles de jeux à bord pour d'autres structures exponentielles, y compris une variante à la algorithmes séquentiels. Nous revenons sur ce point un peu plus loin.

L'uniformité de la sémantique hypercohérente rendait difficile l'approche de la comparaison avec les jeux par « oubli du temps ». Nous avons donc défini une sémantique hypercohérente non-uniforme, ayant une certaine canonicité catégorique : le *bien sûr* est libre. Ce faisant, nous avons obtenu un certain nombre de résultats inattendus. Ainsi l'existence du modèle des multicohérences met en question la notion de séquentialité d'ordre supérieur. La notion de lieux de l'interaction, utilisée pour le retour aux sémantiques uniformes, et l'idée de considérer des para-règles, empruntée à la Ludique, donnent un nouvel éclairage sur les modèles statiques et sur l'uniformité. Cet éclairage révèle aussi de nouvelles propriétés du modèle relationnel : dans ce modèle, la rencontre d'une preuve et d'une contre-preuve contient au plus un point, et ce point est localisé dans un partie particulière de l'interprétation des formules.

Le modèle relationnel utilise une exponentielle multi-ensembliste. Mais les exponentielles pour lesquelles les hypercohérences et les multicohérences forment des modèles extensionnels sont ensemblistes. Par ailleurs, les *bien sûr* ensemblistes ne sont pas libres. Il y a là un léger écart, entre le modèle relationnel et les modèles extensionnels statiques, qui semble étranger à la question de l'uniformité. Nous pensons qu'il serait intéressant de construire des versions extensionnelles des modèles hypercohérents et multicohérents multi-ensemblistes, tous deux bâtis sur une nouvelle version du modèle relationnel. L'idée consisterait à interpréter les agents par des multi-ensembles plutôt que par des ensembles (relations, cliques), sans changer l'interprétation des formules. L'interprétation des preuves tiendrait alors compte des multiplicités. La composition d'un multi-ensemble f sur un ensemble $A \times B$ et d'un multi-ensemble g sur un ensemble

$B \times C$ serait alors le multi-ensemble g sur $A \times C$ qui, à un élément (a, c) de $A \times C$, associe la multiplicité *finie* $\sum_{b \in B} f(a, b) \times g(b, c)$. Bien entendu, pour que cette composition soit bien définie, il faut que le nombre de points b pour lesquels les termes de cette somme sont non-nuls soit fini. Notre hypothèse est que pour le modèle relationnel utilisant des multi-ensembles la rencontre d'une preuve et d'une contre-preuve doit contenir au plus un point, *avec la multiplicité un*. Une telle idée semble aussi pouvoir s'appliquer aux sémantiques de jeux. Un intérêt supplémentaire de cette démarche serait de pouvoir ainsi faire l'économie d'une anatomie du collapse extensionnel du modèle hypercohérent multi-ensembliste sur le modèle ensembliste dans la comparaison avec les jeux.

Nous revenons maintenant sur la question de l'existence d'autres versions des exponentielles pour les jeux à bord. Ce que nous exposons maintenant est bien entendu sujet à caution, faute d'une rédaction plus détaillée.

En premier lieu, il est possible de définir une exponentielle à la algorithmes séquentiels dans les jeux à bord. Le *bien sûr* serait alors interprété par la construction $\sharp_a$ de la section 5.15, suivie d'un décalage positif. Nous avons montré, dans la section 5.2, qu'il n'était pas possible de définir un modèle de la logique linéaire intuitionniste interprétant le *bien sûr* par la construction $\sharp_a$. Pour autant, avec cette exponentielle, il est possible d'obtenir à la fois un modèle de LL*pol* et une catégorie cartésienne close correspondant à une version à bord des algorithmes séquentiels, où les jeux seraient bien terminés. Ceci tient essentiellement au fait que si A et B sont des jeux bien terminés alors $\sharp_a\, A \rightarrowtriangle B$ est encore un jeu bien terminé, car isomorphe au jeu bien terminé $\downarrow \sharp_a\, A \multimap B$, tandis que $\sharp_a\, A$ n'est pas bien terminé. Cette bonne terminaison est essentiel pour la fonctorialité des constructions. Ainsi on peut montrer que $\sharp_a$ est un foncteur dès lors qu'il ne s'applique qu'à des jeux bien terminés (ce qui n'est typiquement pas le cas dans un modèle de ILL où on veut pouvoir faire deux $\sharp_a$ l'un après l'autre). Nous voyons deux intérets immédiats à un tel résultat. D'une part cela ouvre la voie à une description des algorithmes séquentiels dans un cadre de jeux à bord et nous pensons notamment à une présentation par des algorithmes symétriques correspondant à celle donnée dans [Cur93]. D'autre part, nous pourrions alors utiliser les résultats obtenus sur le déploiement des hypercohérences pour donner une preuve, dans le cadre des jeux à bord, du résultat de [Ehr99] qui établit que les hypercohérences forment le collapse extensionnel des algorithmes séquentiels. Cette preuve ne nous apprendrait rien de vraiment nouveau sur ce résultat de T. Ehrhard, mais elle aurait le mérite de confirmer l'intéret des jeux à bord.

Deuxièment, on peut adapter aux jeux à bord la notion de pointeur, présente dans les jeux à la Hyland et Ong, et s'en servir pour définir une exponentielle non-uniforme. On obtient alors une relation de pointage dans laquelle, dans les parties, une occurrence de coup peut pointer sur plusieurs occurrences de coups antérieures à la fois (ceci n'a jamais lieu dans les jeux à la Hyland et Ong). On retrouve alors la reversibilité et la projection sur le modèle relationnel, mais, cette fois ci, avec les exponentielles.

Il n'y a pas à proprement parler de notion d'arène pour ces jeux à bord, mais on peut faire en sorte d'utiliser la notion d'arène des jeux polarisés d'O. Laurent. Dans ce cadre une partie pointée définit un *sous-arbre avec multiplicités* de l'arène qui n'est autre que le point du modèle relationnel sur lequel la partie se projette par oubli du temps. Cette projection se transpose aux jeux polarisés standards, avec un affaiblissement du résultat de projection : le projetté de l'interprétation jeux d'une preuve est seulement inclu dans l'interprétation relationnelle de cette preuve. Néanmoins cette projection est prometteuse sur les jeux polarisés car elle permet de voir les parties dans les jeux polarisés comme des suites de points de la trame d'une hypercohérence uniforme.

Bibliographie

[AC98] Roberto M. Amadio and Pierre-Louis Curien. *Domains and lambda-calculi*, volume 46 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge, july 1998.

[AJM94] Samson Abramsky, Radha Jagadeesan, and Pasquale Malacaria. Full abstraction for PCF. In *Theoretical Aspects of Computer Software*, pages 1–15, 1994.

[Bai99] Patrick Baillot. *Approches dynamiques en sémantique de la logique linéaire : jeux et géométrie de l'interaction*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 1999.

[BC82] Gérard Berry and Pierre-Louis Curien. Sequential algorithms on concrete data structures. *Theoretical Computer Science*, (20) :265–321, 1982.

[BDER97] Patrick Baillot, Vincent Danos, Thomas Ehrhard, and Laurent Regnier. Timeless games. In Mogens Nielsen and Wolfgang Thomas, editors, *Computer Science Logic*, volume 1414 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 56–77, Aahrus, Denmark, August 1997. European Association for Computer Science Logic, Springer-Verlag.

[BE94] Antonio Bucciarelli and Thomas Ehrhard. Sequentiality in an extensional framework. *Information and Computation*, 110(2), 1994.

[BE01] Antonio Bucciarelli and Thomas Ehrhard. On phase semantics and denotational semantics : the exponentials. *Annals of Pure and Applied Logic*, 109(3) :205–241, 2001.

[Bie95] G. M. Bierman. What is a categorical model of intuitionistic linear logic ? In M. Dezani, editor, *Proceedings of Conference on Typed lambda calculus and Applications*. Springer-Verlag LNCS 902, 1995.

[Bou03] Pierre Boudes. Non uniform hypercoherences. In Rick Blute and Peter Selinger, editors, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, volume 69. Elsevier, 2003.

[Cur93] Pierre-Louis Curien. On the symmetry of sequentiality. In *Mathematical Foundations of Programming Semantics*, number 802 in Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1993.

[Cur98] Pierre-Louis Curien. Abstract Böhm trees. *Mathematical Structures in Computer Science*, 8(6), 1998.

[Ehr93] Thomas Ehrhard. Hypercoherences : a strongly stable model of linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 3, 1993.

[Ehr99] Thomas Ehrhard. A relative definability result for strongly stable functions and some corollaries. *Information and Computation*, 152, 1999.

[Ehr00] Thomas Ehrhard. Parallel and serial hypercoherences. *Theoretical computer science*, 247 :39–81, 2000.

[Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50 :1–102, 1987.

[Gir01] Jean-Yves Girard. Locus Solum. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(3) :301–506, June 2001.

[HO00] Martin Hyland and Luke Ong. On full abstraction for PCF : I, II and III. *Information and Computation*, 163(2) :285–408, 2000.

[Laf88] Yves Lafont. *Logiques, catégories et machines*. Thèse de doctorat, Université Paris VII, 1988.

[Lai01] J. Laird. Games and sequential algorithms. Available by http, 2001.

[Lam92] François Lamarche. Sequentiality, games and linear logic (announcement). In *Workshop on Categorical Logic in Computer Science*. Publications of the Computer Science Department of Aarhus University, DAIMI PB-397-II, 1992.

[Lan97] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, second edition, 1997.

[Lau02a] Olivier Laurent. *Étude de la polarisation en logique*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, March 2002.

[Lau02b] Olivier Laurent. Polarized games (extended abstract). In *Proceedings of the seventeenth annual IEEE symposium on Logic In Computer Science*, pages 265–274. IEEE Computer Society Press, July 2002.

[Lon02] J.R. Longley. The sequentially realizable functionals. *Annals of Pure and Applied Logic*, 117(1-3) :1–93, 2002.

[s02a] Paul-André Melliè s. Categorical models of linear logic revisited. Available at `http ://www.pps.jussieu.fr/ mellies/`, July 2002.

[s02b] Paul-André Melliè s. Comparing models of linear logic. Available at `http ://www.pps.jussieu.fr/ mellies/`, July 2002.

[See89] R. A. G. Seely. Linear logic : Autonomous categories and cofree coalgebras. In J. W. Gray and A. Scedrov, editors, *Categories in Computer Science and Logic : Proc. of the Joint Summer Research Conference*, pages 371–382. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

Table des figures

Liste des tableaux

Index

Résumé Cette thèse porte sur les propriétés mathématiques du Calcul et, plus particulièrement, sur le déterminisme et la séquentialité. Dans une perspective issue de la théorie de la démonstration, elle porte aussi sur l'accès aux ressources, avec l'étude des *exponentielles* de la Logique Linéaire, ainsi que sur l'interactivité interne du Calcul, dont la Ludique de J.-Y. Girard tire par ailleurs parti.

Notre point de vue est celui de la *sémantique dénotationnelle* : nous modélisons le Calcul en interprétant ses *agents* par des objets invariants par exécution. Les modèles sont de deux sortes : certains, statiques, exhibent des relations qui unissent les agents du Calcul, et d'autres, dynamiques, focalisent sur l'historique des interactions entre agents, comme dans la sémantique des *jeux* où les agents sont des stratégies.

Le modèle des *hypercohérences*, où les agents sont des cliques dans des hypergraphes, bien que statique, a de bonnes propriétés de séquentialité : T. Ehrhard a montré que les hypercohérences forment le *collapse extensionnel* des algorithmes séquentiels. La dynamique du Calcul y est internalisée : nous la reconstruisons, par *déploiement* d'hypergraphes. Nous obtenons des *jeux à bord* où les *polarités logiques*, telles qu'étudiées par O. Laurent, prévalent. Le bord est le lieu où les calculs terminent. Dans le cas linéaire il correspond précisément, par effacement des historiques, au modèle statique des *relations*.

Les hypercohérences sont un raffinement *uniforme* de ce dernier modèle. Uniforme signifie que les agents n'anticipent leurs arguments que comme produit par d'autres agents. Cette uniformité efface de la structure du Calcul et limite les possibilités de reconstruction.

Un récent procédé de A. Bucciarelli et T. Ehrhard fournit des modèles non-uniformes proches des hypercohérences. Nous en améliorons certains en construisant leur *exponentielle libre*. Ces modèles non-uniformes ne sont pas séquentiels mais, chose surprenante, le déterminisme est au rendez-vous. Le retour à l'uniforme consiste alors en une restriction simple et immédiate aux *lieux de l'interaction*. Ceci fournit un cadre sémantique très modulaire, idéal pour la comparaison avec les modèles dynamiques.

Ce travail met aussi en évidence une réversibilité temporelle des jeux à bord, correspondant au passage à l'orthogonal. Nous montrons comment cette réversibilité suggère une nouvelle lecture des jeux polarisés d'O. Laurent ([Lau02b]) qui devrait fournir le bon cadre pour la comparaison avec les hypercohérences.