Hypercohérences et Jeux polarisés

Rome 2003

Pierre BOUDES

Programme Vinci

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité
- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité
- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**
  - *Sémantique* des jeux ou nouvelle syntaxe ?

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité
- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**
  - *Sémantique* des jeux ou nouvelle syntaxe ?
  - Ludique : stratégie = preuve sans coupure

Sémantique dénotationnelle

- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**

- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité

- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**
  - *Sémantique* des jeux ou nouvelle syntaxe ?
  - Ludique : stratégie = preuve sans coupure

- Espaces cohérents, hypercohérences ?

Sémantique dénotationnelle

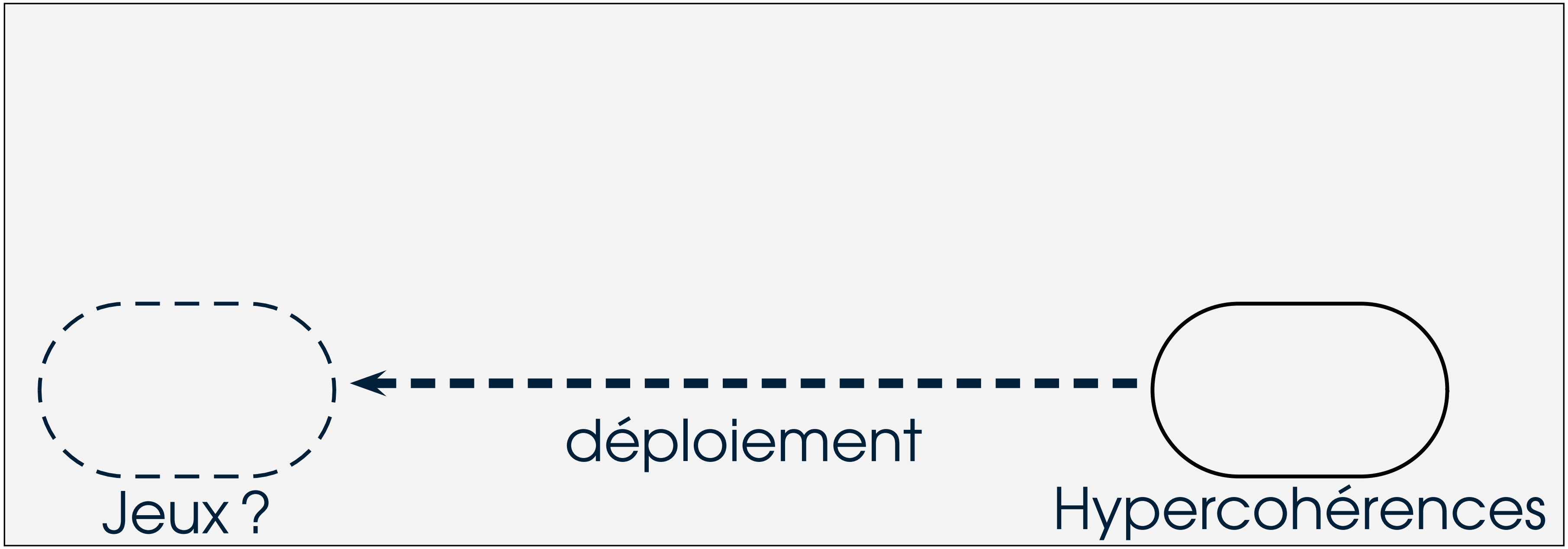
- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité
- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**
  - *Sémantique* des jeux ou nouvelle syntaxe ?
  - Ludique : stratégie = preuve sans coupure
- Espaces cohérents, hypercohérences ?
  - *Découverte* de la logique linéaire ($!E \multimap F$).

Sémantique dénotationnelle

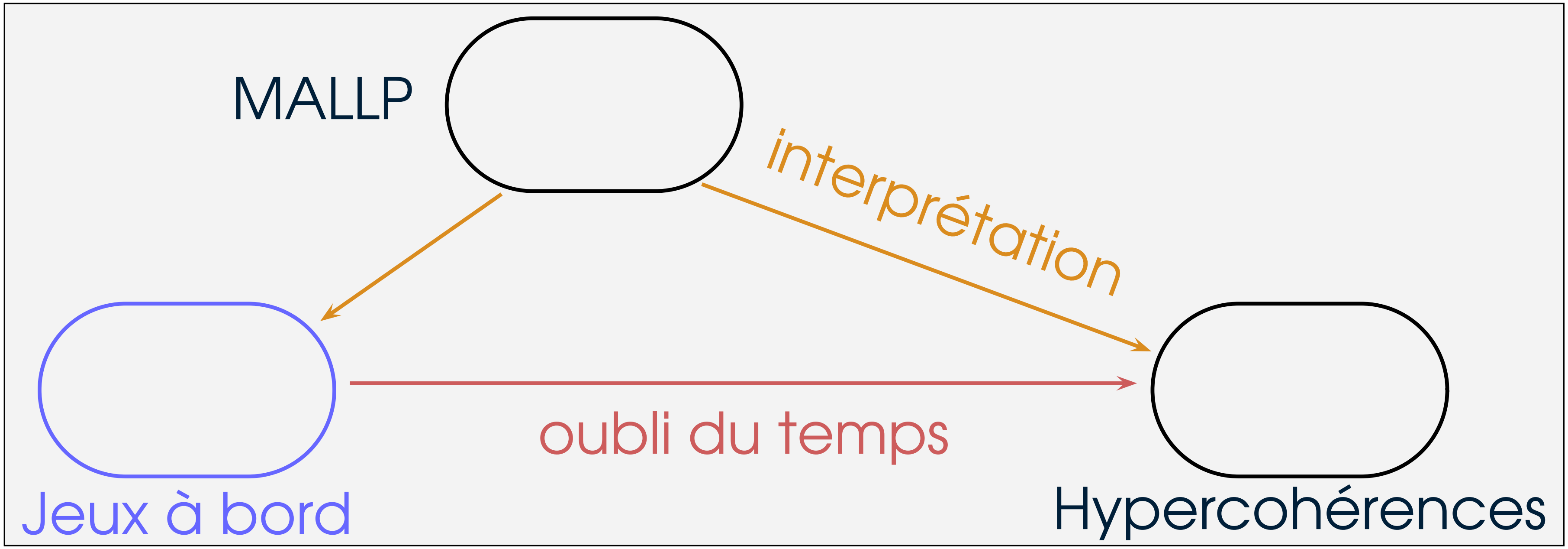
- **Étudier les propriétés mathématiques des preuves.**
- Interpréter les preuves par des objets invariants par réduction : fonctions, cliques, stratégies, morphismes...
  - Plus ou moins éloignée de la syntaxe. (Plus !)
  - Surjectivité (jeux), injectivité
- **« Syntaxe/sémantique une distinction dépassée ».**
  - *Sémantique* des jeux ou nouvelle syntaxe ?
  - Ludique : stratégie = preuve sans coupure
- Espaces cohérents, hypercohérences ?
  - *Découverte* de la logique linéaire ($!E \multimap F$).
  - **Les hypercohérences forment le collapse extensionnel des algorithmes séquentiels** (Ehrhard).

Contenu de la thèse

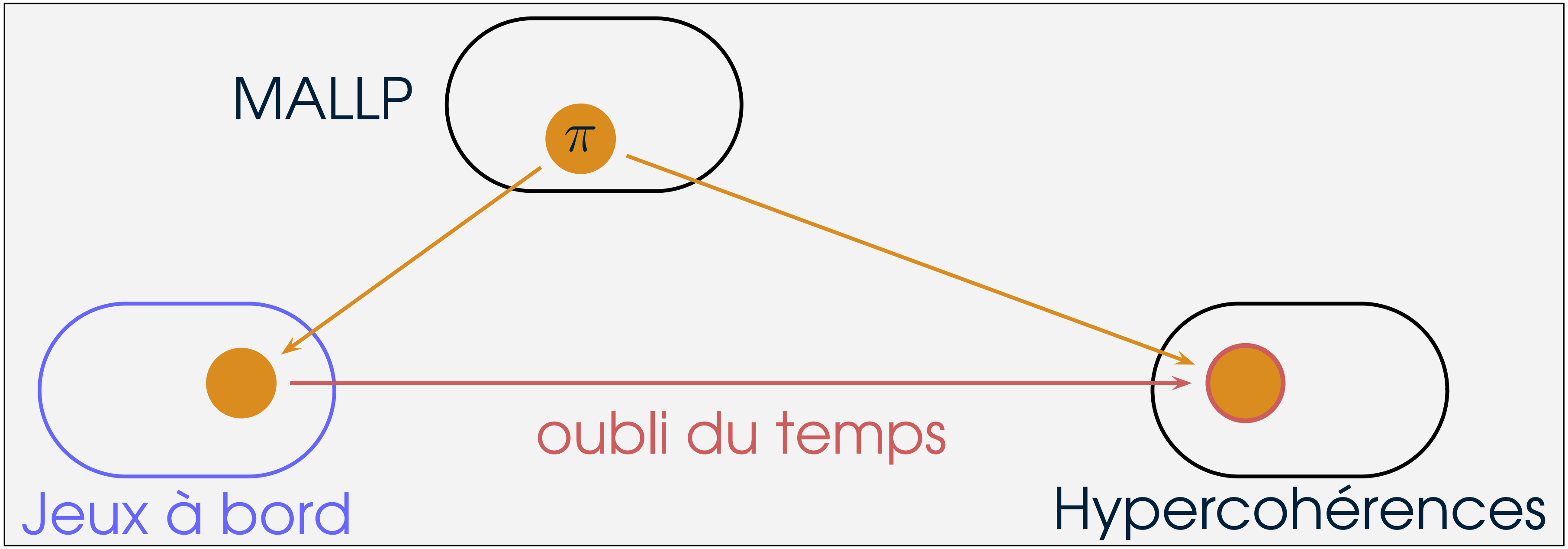
Contenu de la thèse



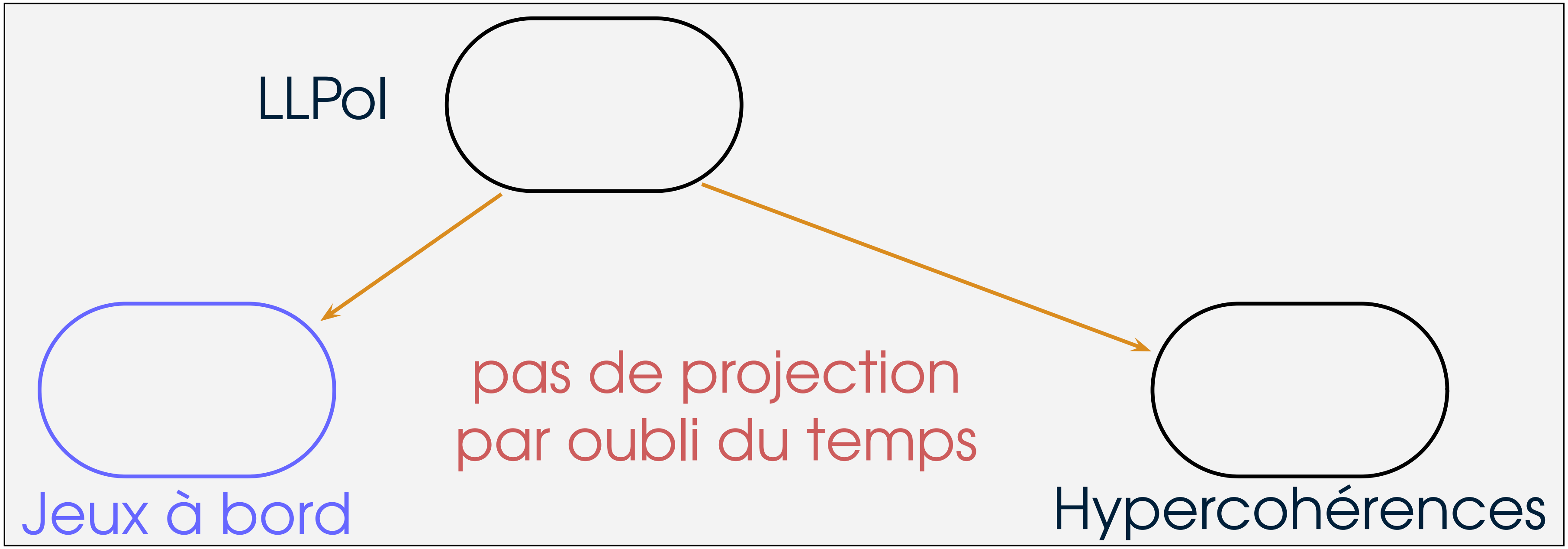
Contenu de la thèse



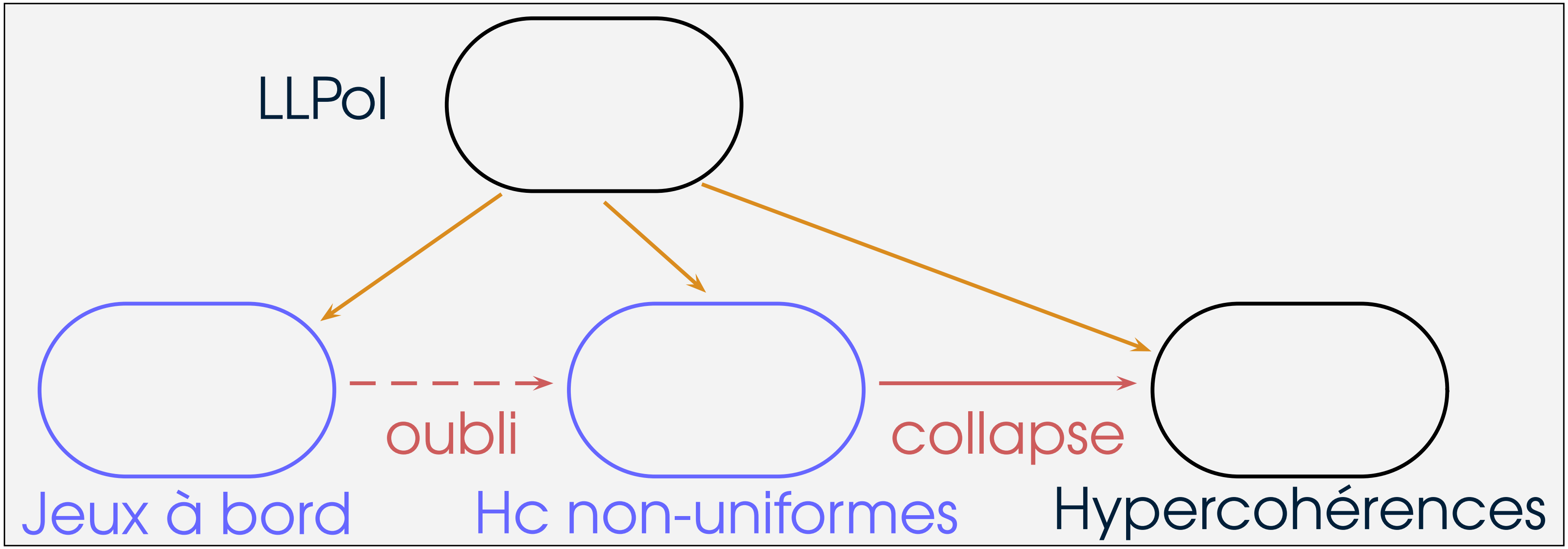
Contenu de la thèse



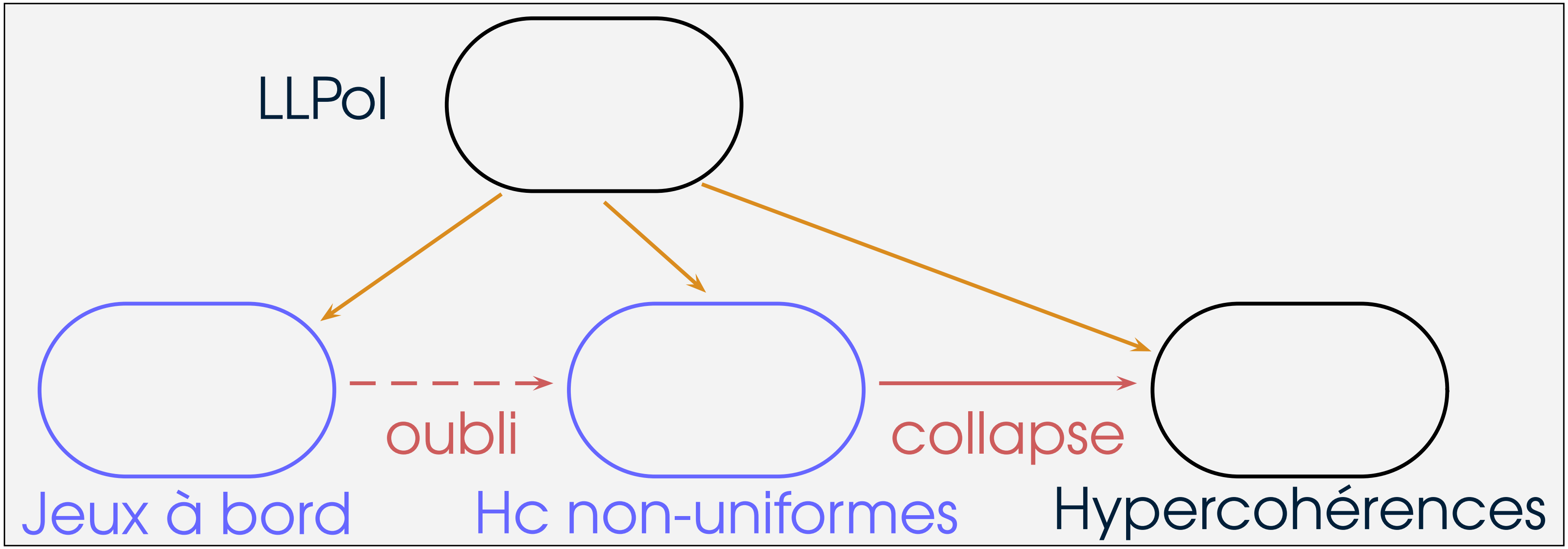
Contenu de la thèse



Contenu de la thèse



Contenu de la thèse

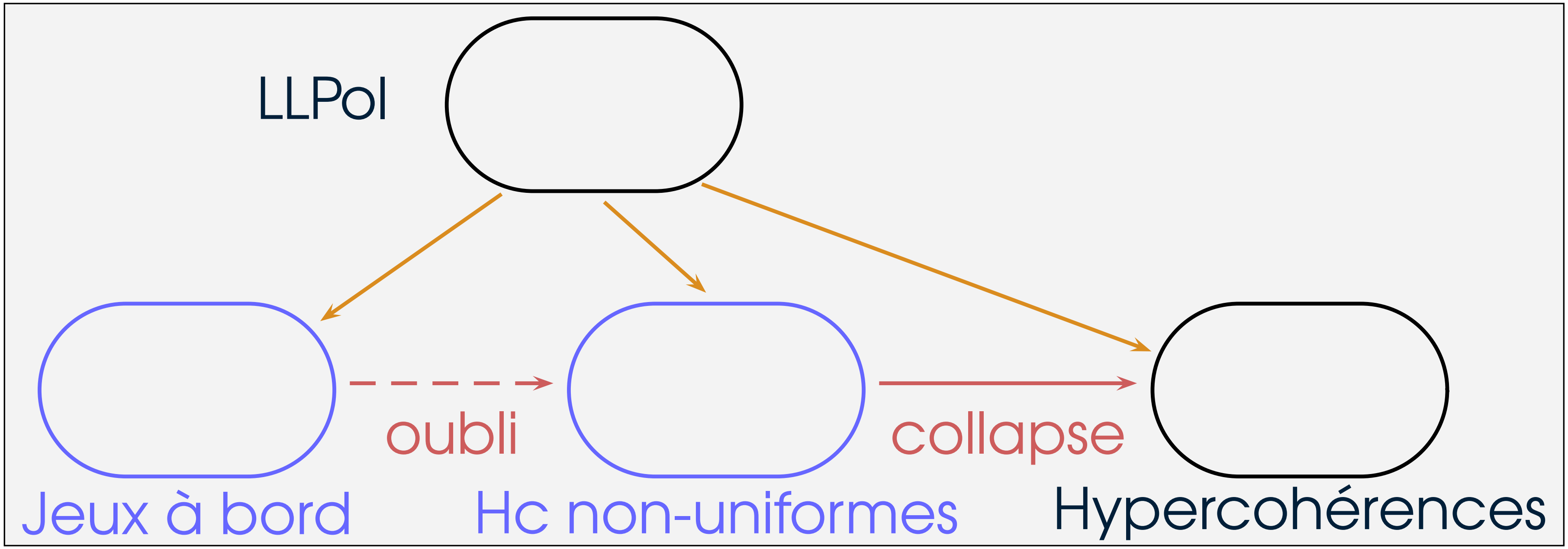


$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors \{}\ \ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors v}\ \ \texttt{sinon f \}}$$
$$\texttt{sinon \{}\ \ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors v sinon f \}}$$

non uniforme : $\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$

uniforme : $\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}), \qquad ([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$

Contenu de la thèse



$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ \texttt{v}\ \ \texttt{sinon}\ \texttt{f}\ \}$$
$$\texttt{sinon}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ \texttt{v}\ \texttt{sinon}\ \texttt{f}\ \}$$

non uniforme : $\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$

uniforme : $\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}), \qquad ([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$

Plan

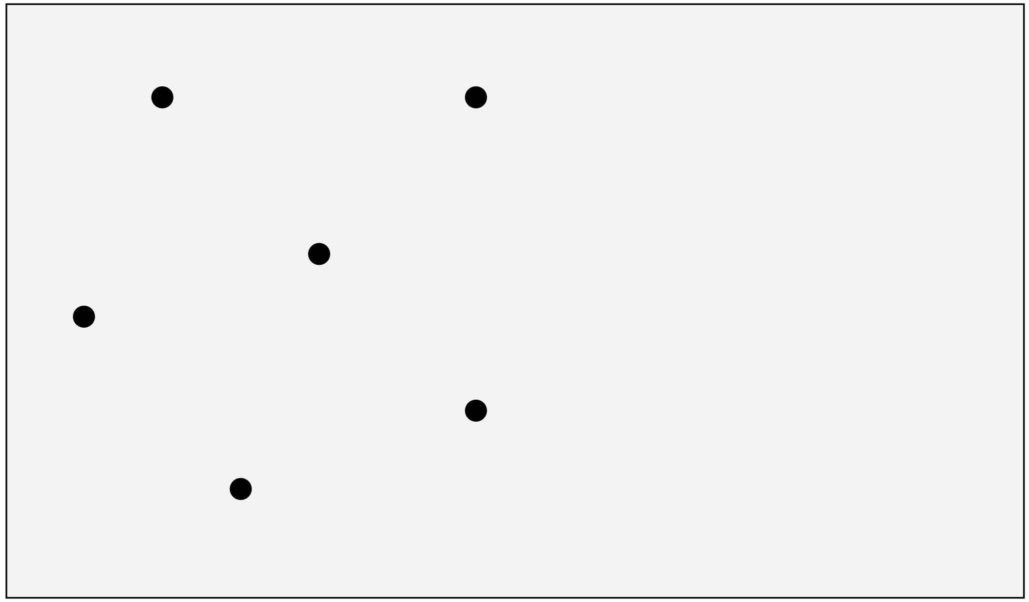
- Préliminaires
  - espaces de P-cohérence
  - logique linéaire polarisée
  - jeux
- Déploiement d'hypercohérences
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - oubli du temps, réversibilité
- Projection directe des jeux polarisés
  - pointeurs et projection
  - cohérence

Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.

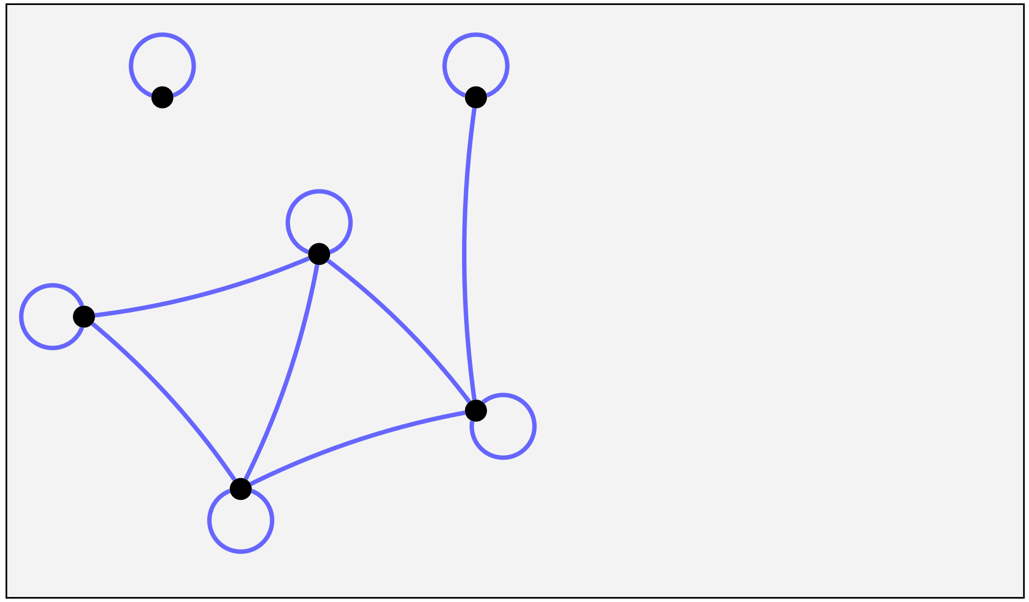
Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



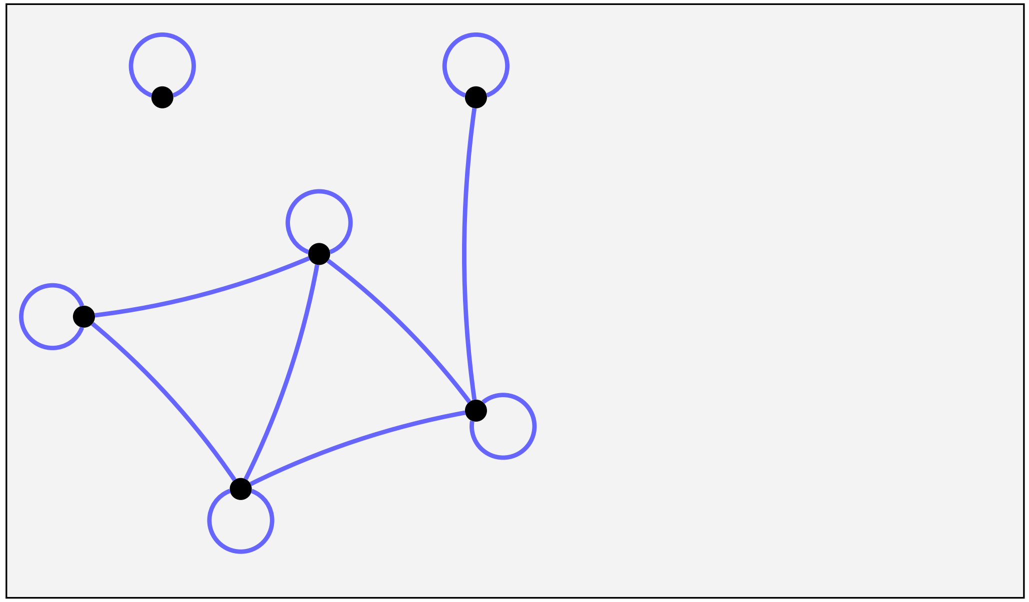
Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



Les espaces cohérents

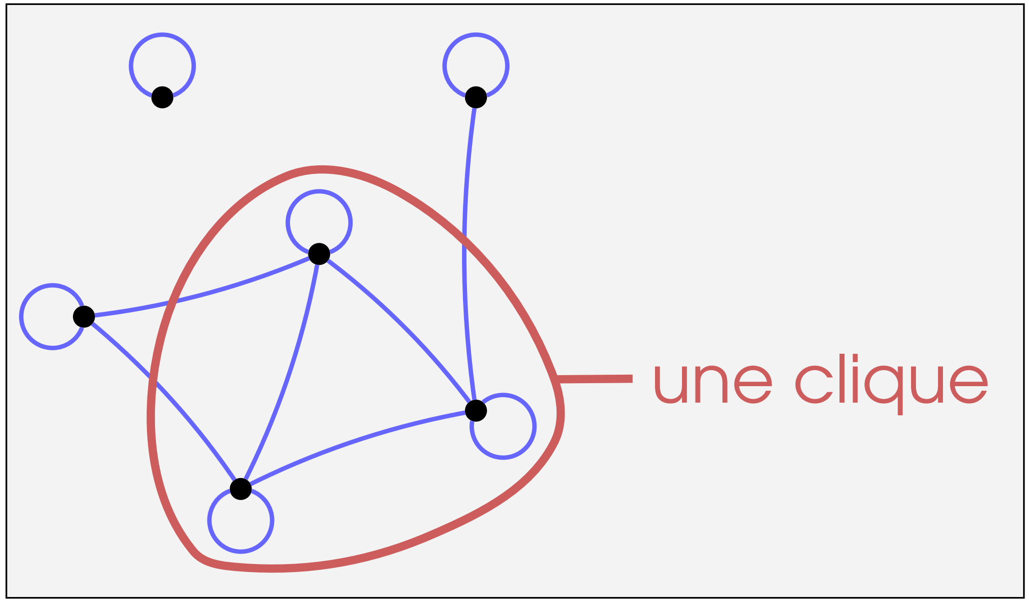
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.

Les espaces cohérents

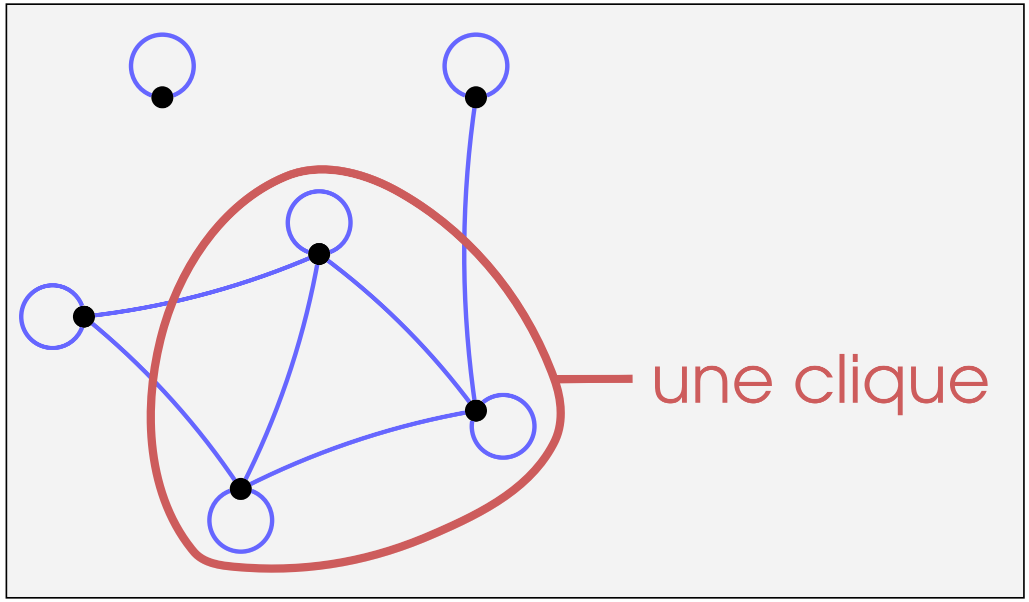
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.

Les espaces cohérents

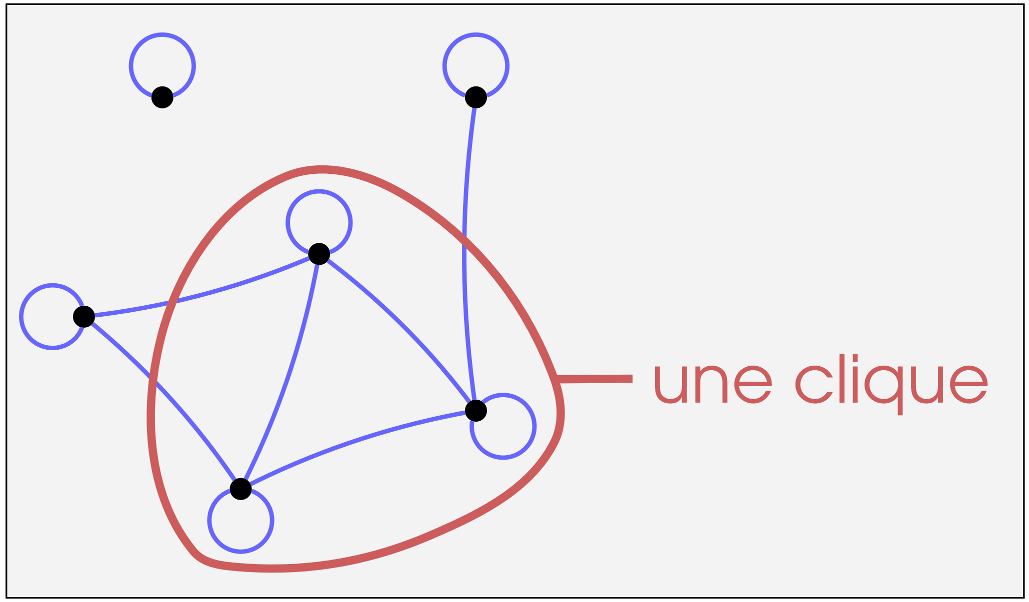
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.
- Hypercohérences une « généralisation » de 2 à n (hypergraphes).

Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.
- Hypercohérences une « généralisation » de 2 à n (hypergraphes).
- *Sans la cohérence* : modèle relationnel.

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$

Espaces de P-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \frown_X, \asymp_X)$ avec

$$\frown_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \mathrel{\substack{\frown\\\smile}}_X, \asymp_X)$ avec

$$\mathrel{\substack{\frown\\\smile}}_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

- Neutralité : $\mathrm{N}_X = \mathrel{\substack{\frown\\\smile}}_X \cap \asymp_X$

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \frown_X, \asymp_X)$ avec

$$\frown_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

- Neutralité : $\mathrm{N}_X = \frown_X \cap \asymp_X$
- Clique : $x \subseteq |X|$, $P(x) \subseteq \frown_X$

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \smile_X, \asymp_X)$ avec

$$\smile_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

- Neutralité : $\mathsf{N}_X = \smile_X \cap \asymp_X$
- Clique : $x \subseteq |X|$, $P(x) \subseteq \smile_X$
- Orthogonal : $X^\perp = (|X|, \asymp_X, \smile_X)$

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \frown_X, \asymp_X)$ avec

$$\frown_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

- Neutralité : $\mathsf{N}_X = \frown_X \cap \asymp_X$
- Clique : $x \subseteq |X|$, $P(x) \subseteq \frown_X$
- Orthogonal : $X^\perp = (|X|, \asymp_X, \frown_X)$
- Déterministe : *clique* $\cap$ *anti-clique* $=$ au plus un point

Espaces de *P*-cohérence

- Puissance P : endofoncteur de la catégorie des ensembles et des inclusions $E \subseteq F \Rightarrow P(E) \subseteq P(F)$
- Espace de P-cohérence : $X = (|X|, \smile_X, \asymp_X)$ avec

$$\smile_X \cup \asymp_X = P(|X|).$$

- Neutralité : $\mathsf{N}_X = \smile_X \cap \asymp_X$
- Clique : $x \subseteq |X|$, $P(x) \subseteq \smile_X$
- Orthogonal : $X^\perp = (|X|, \asymp_X, \smile_X)$
- Déterministe : *clique* $\cap$ *anti-clique* $=$ au plus un point
- Réflexif : $\forall x \subseteq^* |X|, P(x) \subseteq \mathsf{N}_X \iff x$ singleton

Espaces de *P*-cohérence : exemples

P	Modèle	Déterministe	Réflexif
$\emptyset$	relationnel		
$\mathcal{M}_{\{2\}}$	espaces cohérents	x	x
$\mathcal{P}^*_{\mathrm{fin}}$	hypercohérences	x	x
$\mathcal{M}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$	multicohérences	x	x
versions *finitaires* ou bien *libres*		x	x
versions non uniformes		(x)	
identité	relationnel bipartite	x	
identité	bipartite uniforme	x	

Espaces de P-cohérence : résultats

- **Déterminisme**

Espaces de *P*-cohérence : résultats

- **Déterminisme**
- Corollaire :

$$\sharp([\pi_A]_{\mathsf{R}} \cap [\pi_{A^\perp}]_{\mathsf{R}}) \leq 1$$

para-règles : $\dfrac{}{\vdash}$ (*démon*) $\dfrac{}{\vdash \Gamma}$ (*abandon*)

Espaces de *P*-cohérence : résultats

- **Déterminisme**
- Corollaire :

$$\sharp([\pi_A]_{\mathsf{R}} \cap [\pi_{A^\perp}]_{\mathsf{R}}) \leq 1$$

para-règles : $\dfrac{}{\vdash}$ (*démon*) $\dfrac{}{\vdash \Gamma}$ (*abandon*)

- *Uniforme* $\subseteq$ *non uniforme* (« part réflexive »)

Espaces de *P*-cohérence : résultats

- **Déterminisme**
- Corollaire :

$$\sharp([\pi_A]_{\mathsf{R}} \cap [\pi_{A^\perp}]_{\mathsf{R}}) \leq 1$$

para-règles : $\dfrac{}{\vdash}$ (*démon*) $\dfrac{}{\vdash \Gamma}$ (*abandon*)

- *Uniforme* $\subseteq$ *non uniforme* (« part réflexive »)
- Même puissance, même collapse (finitaire)

Espaces de *P*-cohérence : résultats

- **Déterminisme**
- Corollaire :

$$\sharp([\pi_A]_{\mathsf{R}} \cap [\pi_{A^\perp}]_{\mathsf{R}}) \leq 1$$

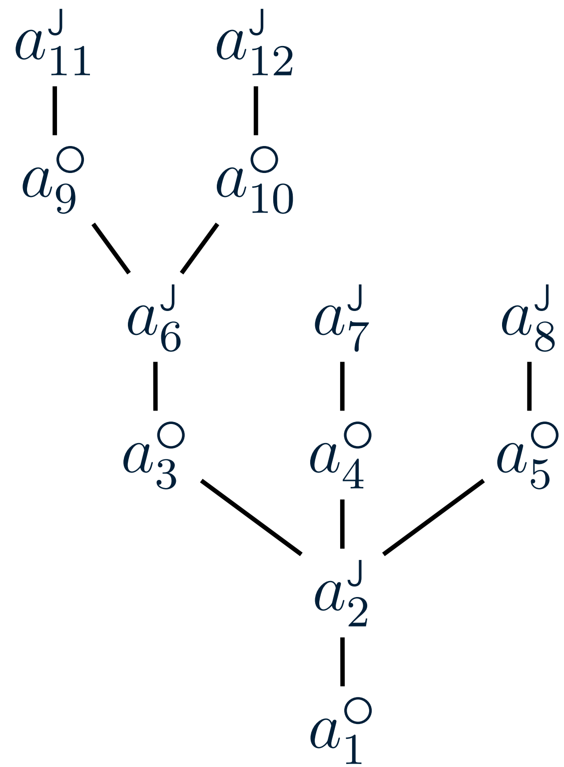
para-règles : $\dfrac{}{\vdash}$ (*démon*) $\dfrac{}{\vdash \Gamma}$ (*abandon*)

- *Uniforme* $\subseteq$ *non uniforme* (« part réflexive »)
- Même puissance, même collapse (finitaire)
- Modèle relationnel bipartite uniforme :

$$\forall A, \forall \pi, \left[\frac{\vdots\, \pi}{\vdash ?A}\right]_{\mathsf{RB}} = \emptyset.$$

Sémantique des jeux AJM

$A = (A^{\bigcirc}, A^{\mathsf{J}}, P)$ $\qquad a_1^{\bigcirc} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\bigcirc} \quad a_6^{\mathsf{J}} \quad a_9^{\bigcirc} \quad a_{11}^{\mathsf{J}}$

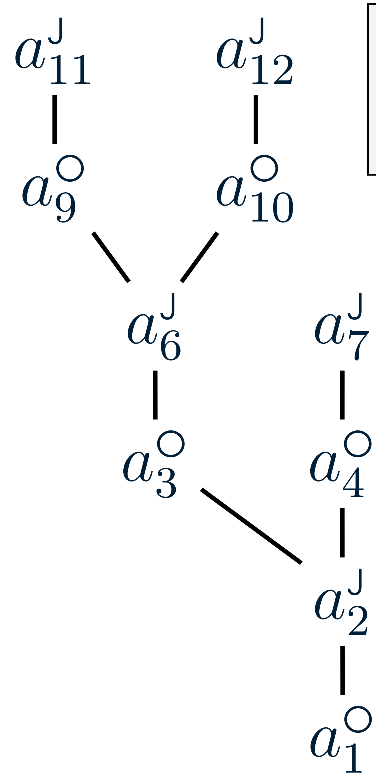


Stratégie

Sémantique des jeux AJM

$$A = (A^{\bigcirc}, A^{\mathsf{J}}, P)$$

$$a_1^{\bigcirc} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\bigcirc} \quad a_6^{\mathsf{J}} \quad a_9^{\bigcirc} \quad a_{11}^{\mathsf{J}}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} f : P^{\bigcirc} \rightharpoonup A^{\mathsf{J}} \\ a_1 a_2 a_3 \mapsto a_6 \end{array}}$$

Stratégie

Sémantique des jeux AJM

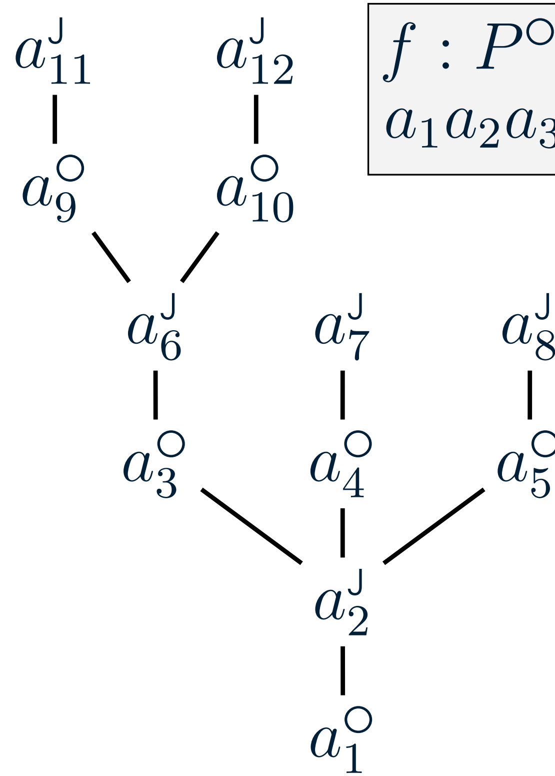
$$A = (A^{\circ}, A^{\mathsf{J}}, P)$$

$$a_1^{\circ} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\circ} \quad a_6^{\mathsf{J}} \quad a_9^{\circ} \quad a_{11}^{\mathsf{J}}$$

composition

	A	B	C
O			c_1°
		b_1°	
J	a_1°		
	$\vdots$		
O	a_n^{J}		
		b_2^{J}	
		b_3°	
		b_4^{J}	
J			c_2^{J}

$$\boxed{\begin{array}{l} f : P^{\circ} \rightharpoonup A^{\mathsf{J}} \\ a_1 a_2 a_3 \mapsto a_6 \end{array}}$$



Stratégie

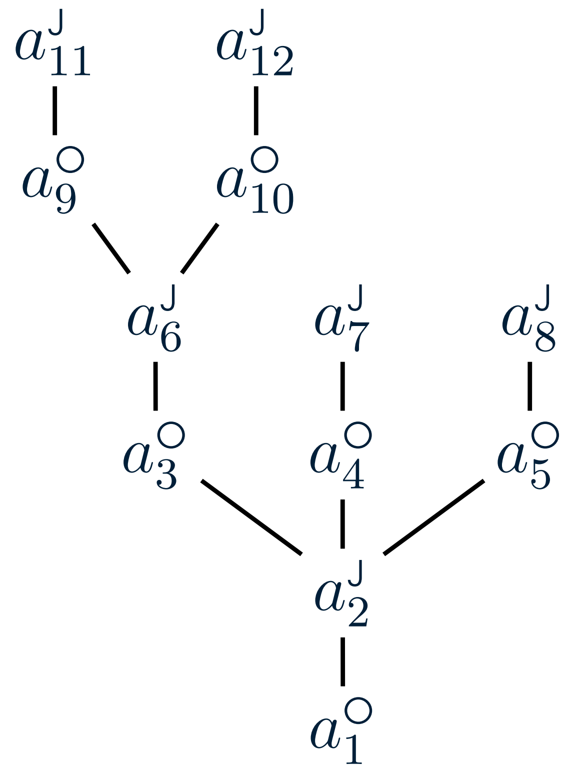
Sémantique des jeux HO

$$A = (A^{\bigcirc}, A^{\mathsf{J}}, \leftarrow)$$

$$a_1^{\bigcirc}\quad a_2^{\mathsf{J}}\quad a_3^{\bigcirc}\quad a_6^{\mathsf{J}}\quad a_9^{\bigcirc}\quad a_{11}^{\mathsf{J}}$$

composition

	A	B	C
O			$c_1^{\bigcirc}$
		$b_1^{\bigcirc}$	
J	$a_1^{\bigcirc}$		
	$\vdots$		
O	a_n^{J}		
		b_2^{J}	
		$b_3^{\bigcirc}$	
		b_4^{J}	
J			c_2^{J}



Stratégie

Logique linéaire polarisée

- Polarités :

$$P := 0 \mid 1 \mid \alpha^{\perp} \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid !N$$

$$N := \top \mid \perp \mid \alpha \mid N \,\&\, N \mid N \parr N \mid ?P$$

Logique linéaire polarisée

- Polarités :

$$P := 0 \mid 1 \mid \alpha^{\perp} \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid \,!N$$

$$N := \top \mid \bot \mid \alpha \mid N \,\&\, N \mid N \parr N \mid \,?P$$

- LLPol : fragment polarisé de la logique linéaire

Logique linéaire polarisée

- Polarités :

$$P := 0 \mid 1 \mid \alpha^{\perp} \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid\, !N$$
$$N := \top \mid \perp \mid \alpha \mid N \,\&\, N \mid N \parr N \mid\, ?P$$

- LLPol : fragment polarisé de la logique linéaire
  - au plus une formule positive (sauf pour $\top$)

Logique linéaire polarisée

- Polarités :

$$P := 0 \mid 1 \mid \alpha^{\perp} \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid !N$$

$$N := \top \mid \bot \mid \alpha \mid N \,\&\, N \mid N \parr N \mid ?P$$

- LLPol : fragment polarisé de la logique linéaire
  - au plus une formule positive (sauf pour $\top$)
- MALLP : même fragment, sans régles structurelles

Logique linéaire polarisée

- Polarités :

$$P := 0 \mid 1 \mid \alpha^{\perp} \mid P \oplus P \mid P \otimes P \mid !N$$

$$N := \top \mid \perp \mid \alpha \mid N \mathbin{\&} N \mid N \parr N \mid ?P$$

- LLPol : fragment polarisé de la logique linéaire
  - au plus une formule positive (sauf pour $\top$)
- MALLP : même fragment, sans régles structurelles
  - Exponentielles $\rightsquigarrow$ décalages : $\downarrow N$, $\uparrow P$.

Plan

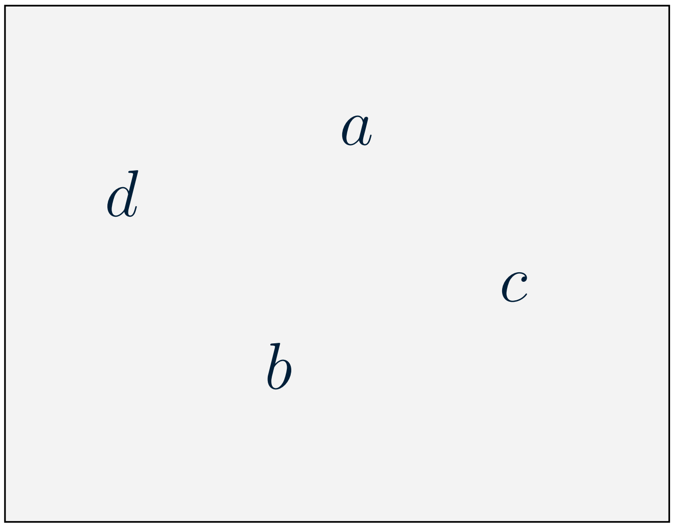
- Préliminaires
  - espaces de P-cohérence
  - logique linéaire polarisée
  - jeux
- Déploiement d'hypercohérences
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - oubli du temps, réversibilité
- Projection directe des jeux polarisés
  - pointeurs et projection
  - cohérence

Le déploiement en tours

Une hypercohérence

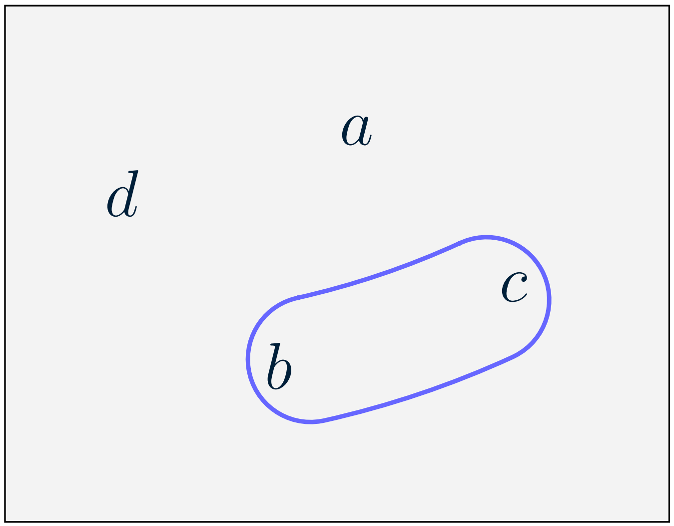
Le déploiement en tours

Une hypercohérence



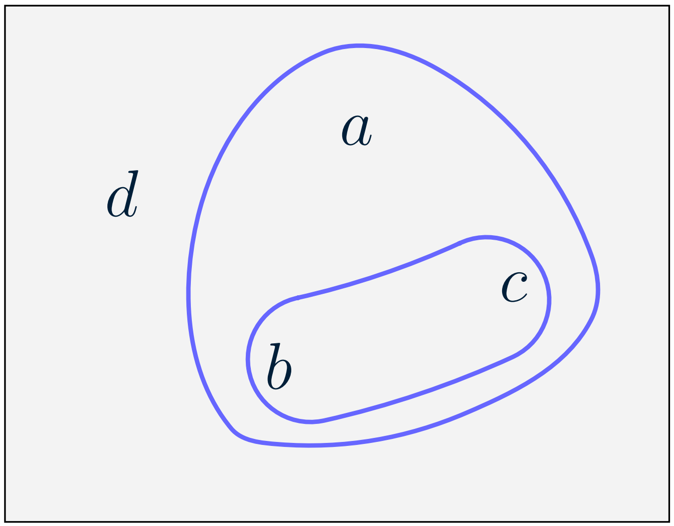
Le déploiement en tours

Une hypercohérence



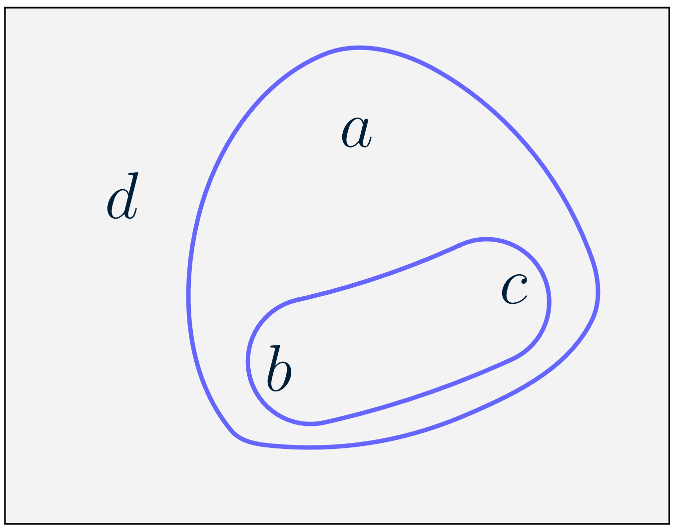
Le déploiement en tours

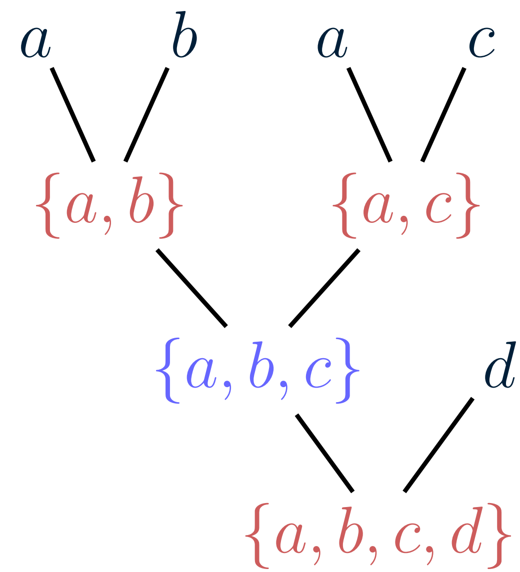
Une hypercohérence



Le déploiement en tours

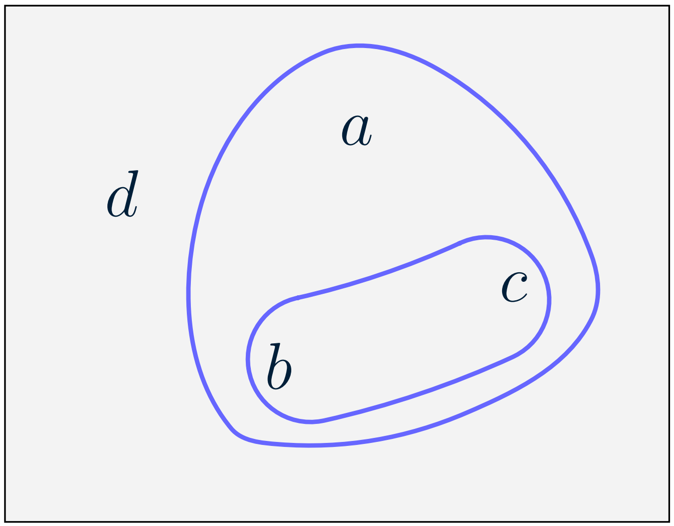
Une hypercohérence

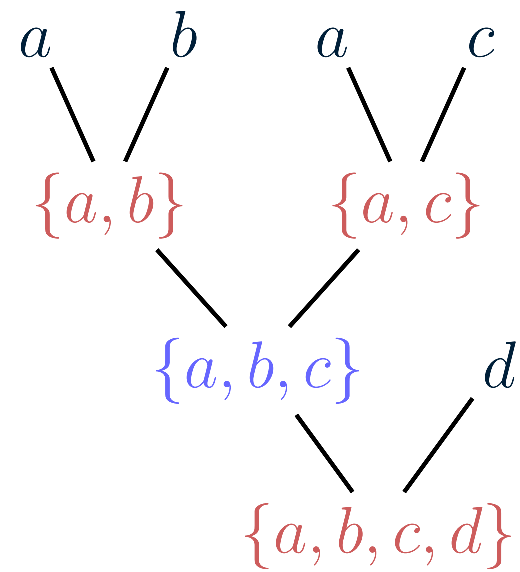




Le déploiement en tours

Une hypercohérence



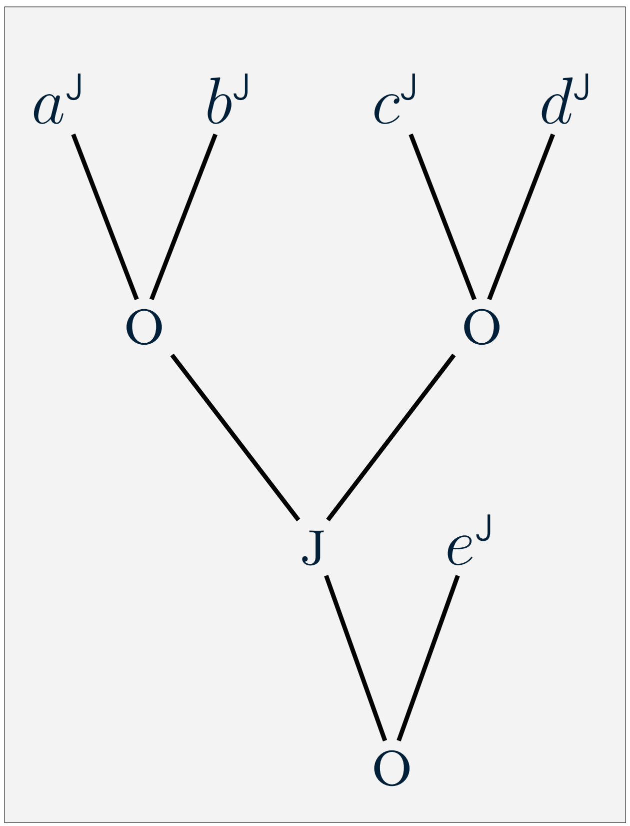


joueur = cohérent

opposant = incohérent

Le cas du *bien sûr*

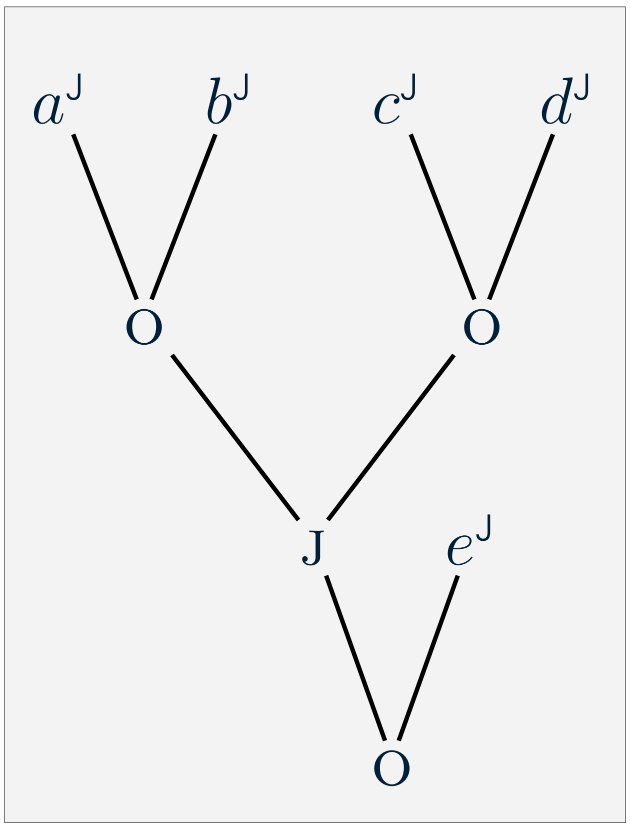
Hypercohérence X



Le cas du *bien sûr*

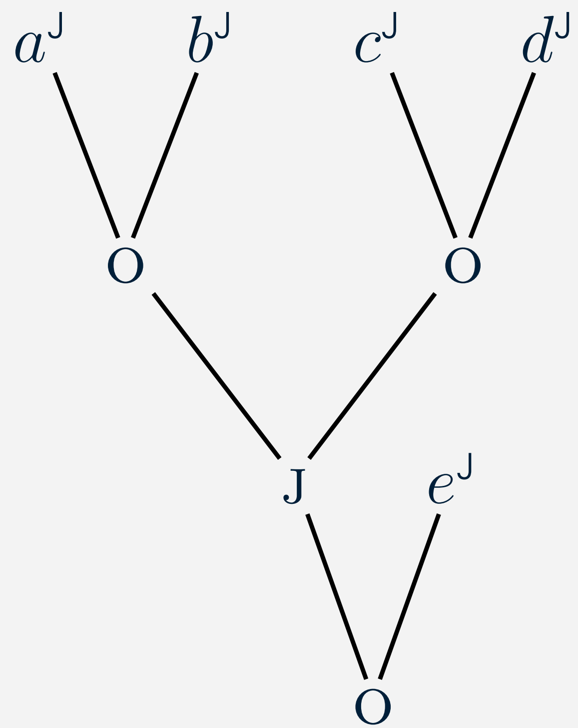
$|!X|$ = les cliques finies de X

Hypercohérence X



Le cas du *bien sûr*

Hypercohérence X



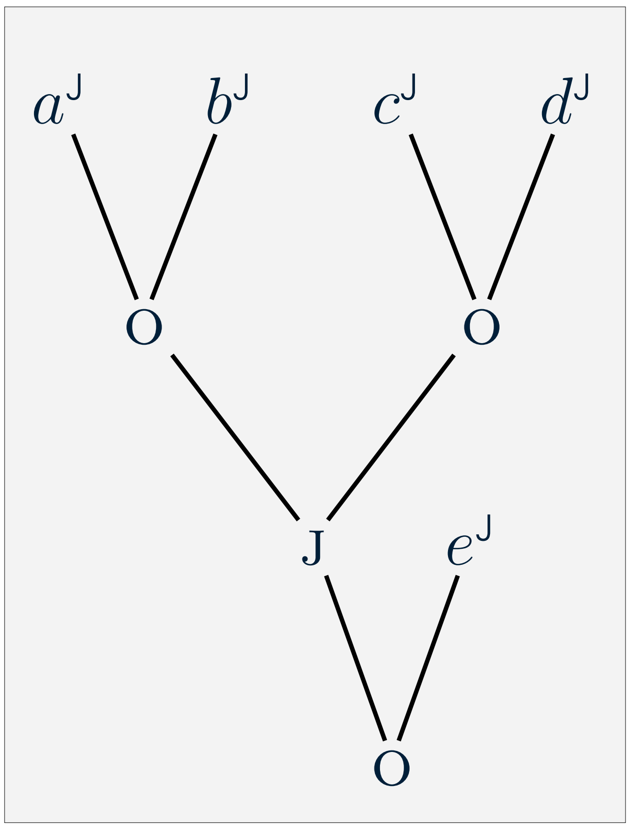
$|!X|$ = les cliques finies de X

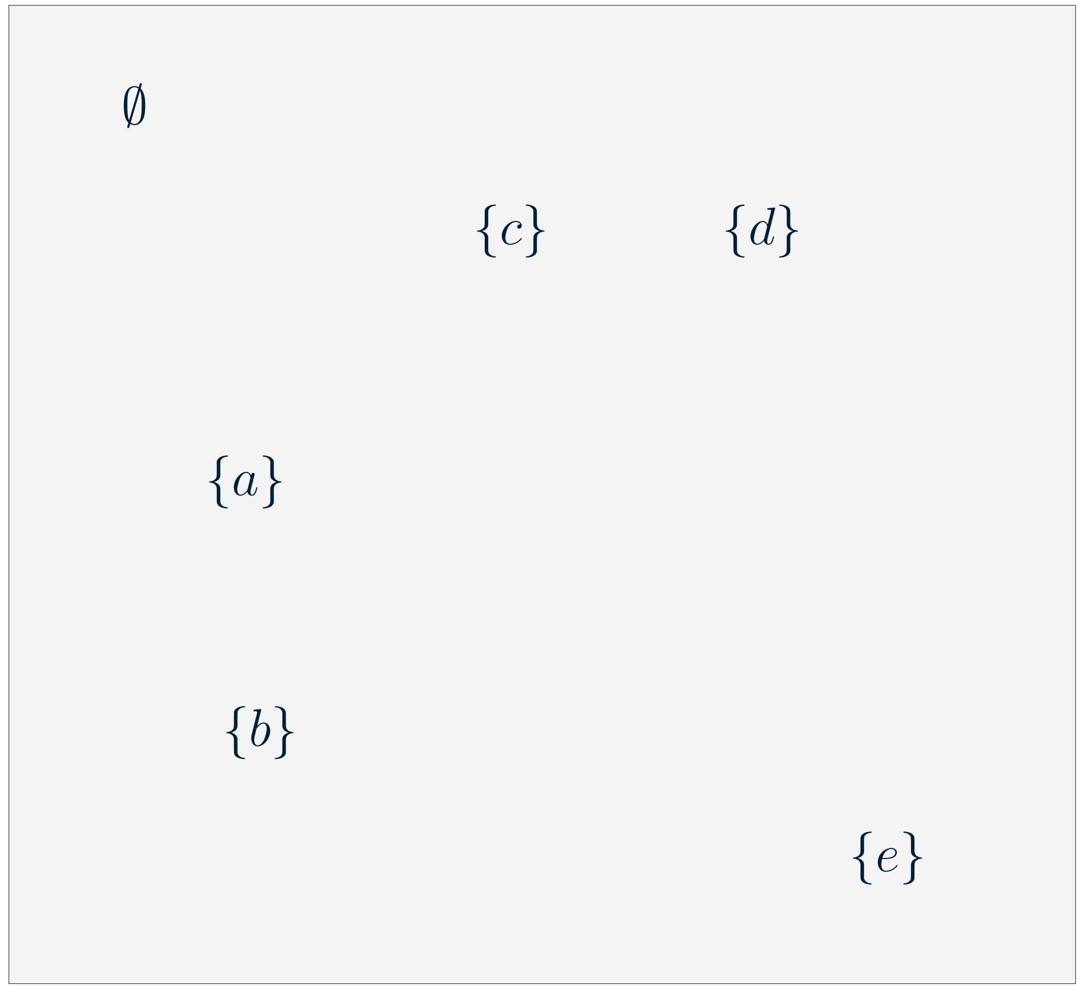
$\emptyset$

Le cas du *bien sûr*

$|!X| =$ les cliques finies de X

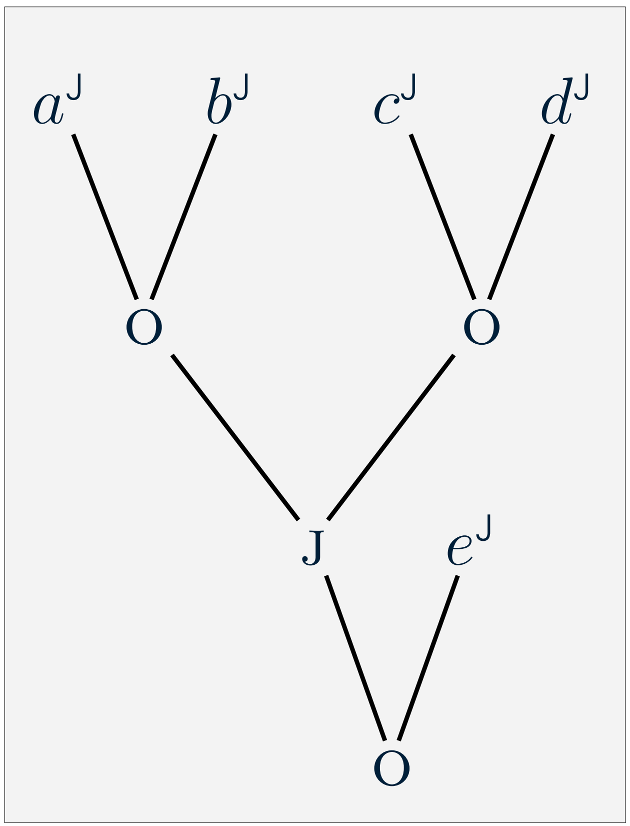
Hypercohérence X





Le cas du *bien sûr*

Hypercohérence X



$|!X|$ = les cliques finies de X

$\emptyset$

$\{c\}$ $\{d\}$

$\{a\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$

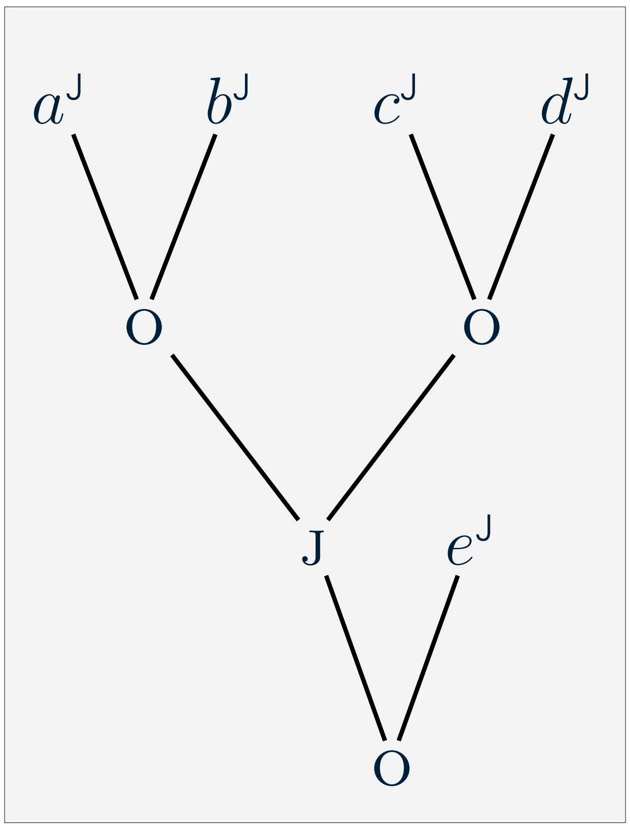
$\{b\}$ $\{b, c\}$ $\{b, d\}$

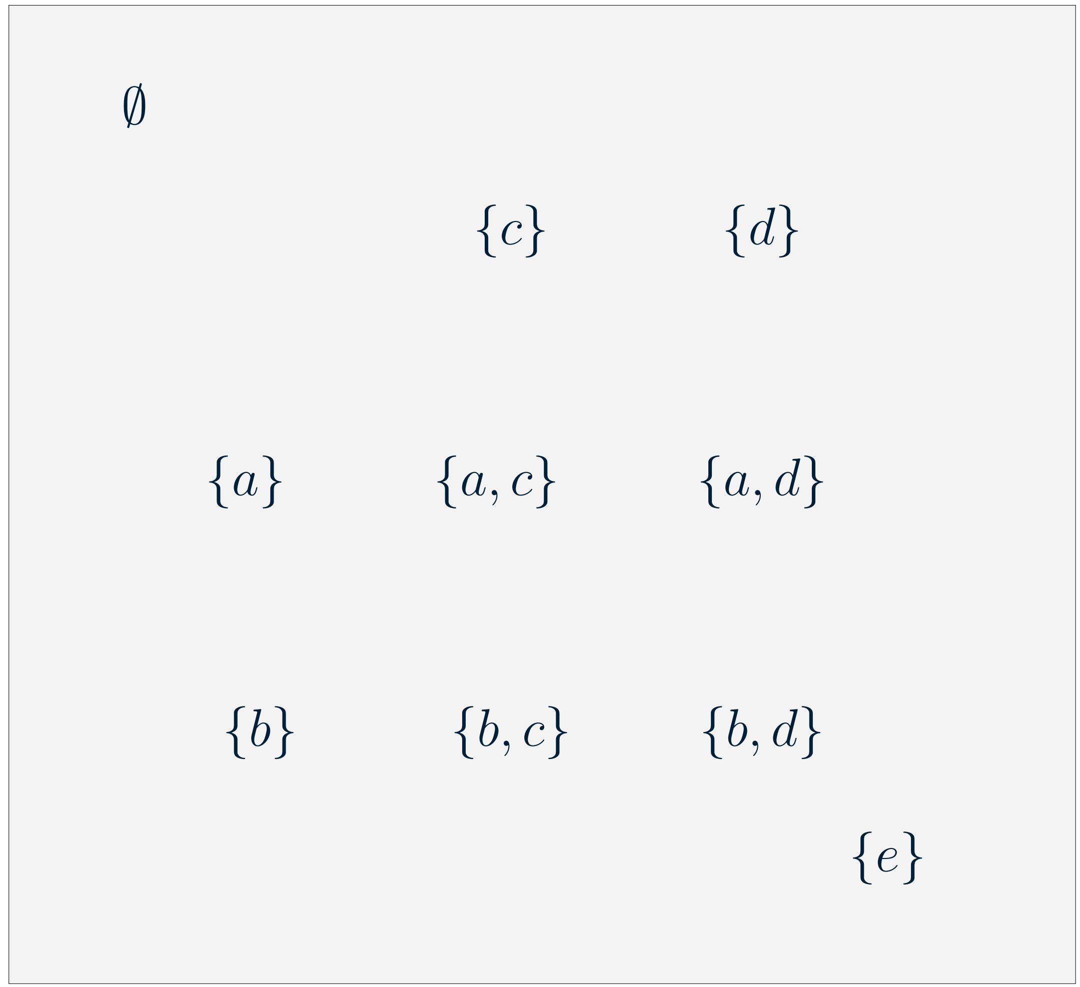
$\{e\}$

Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

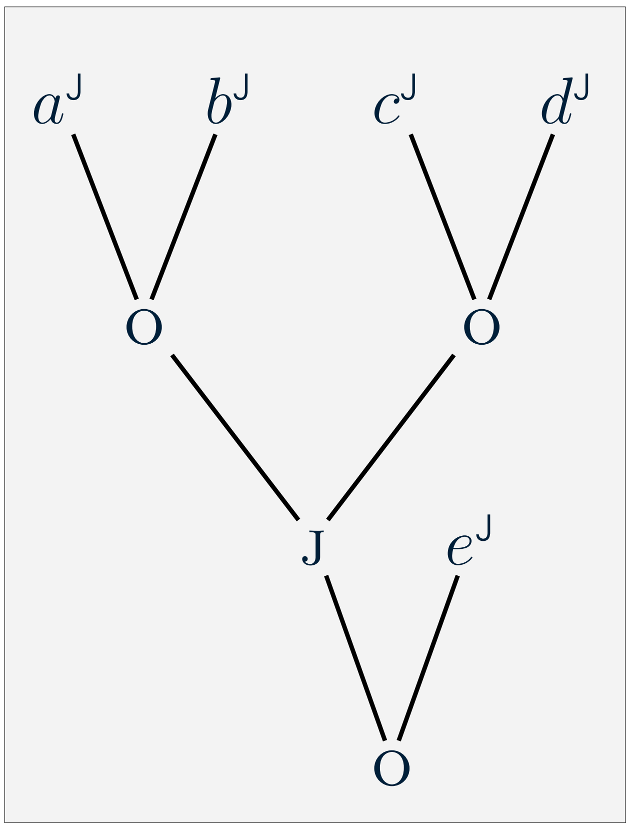


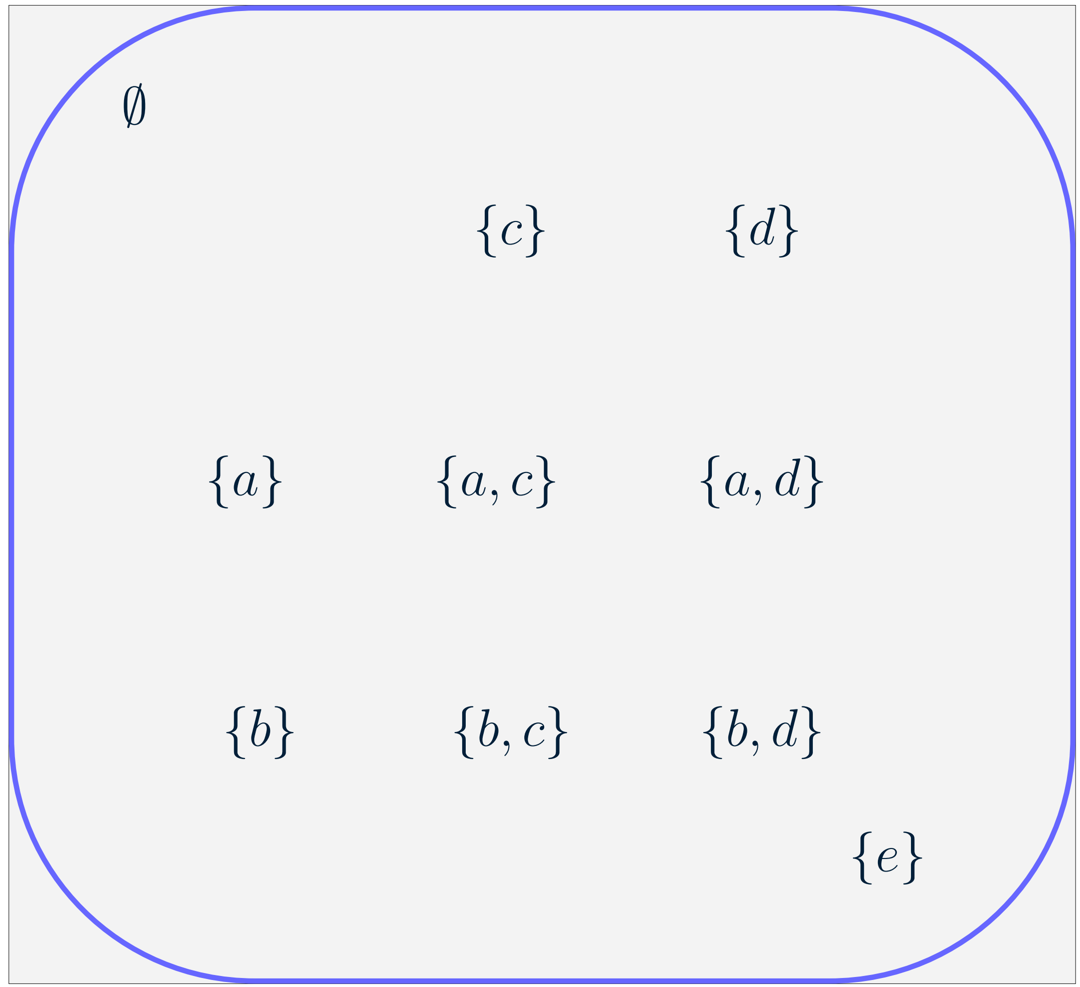


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

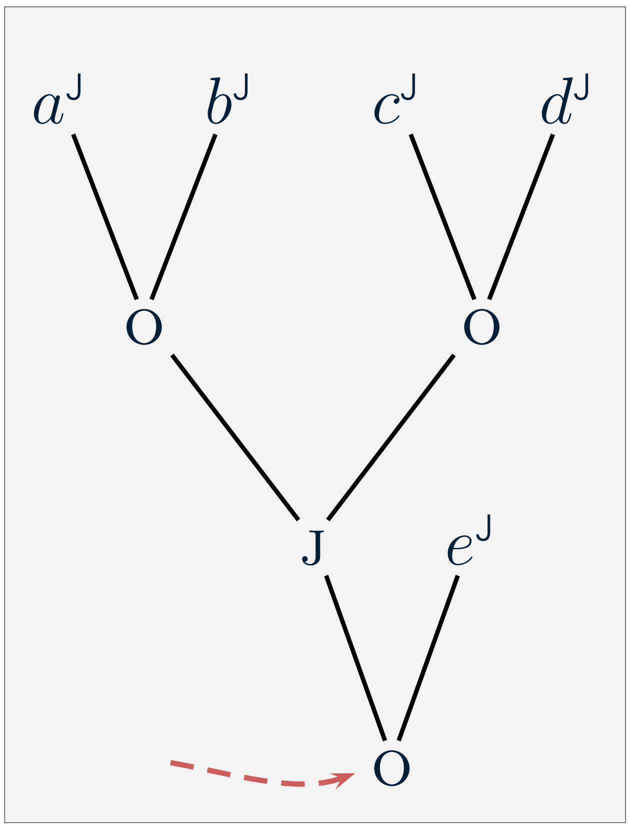


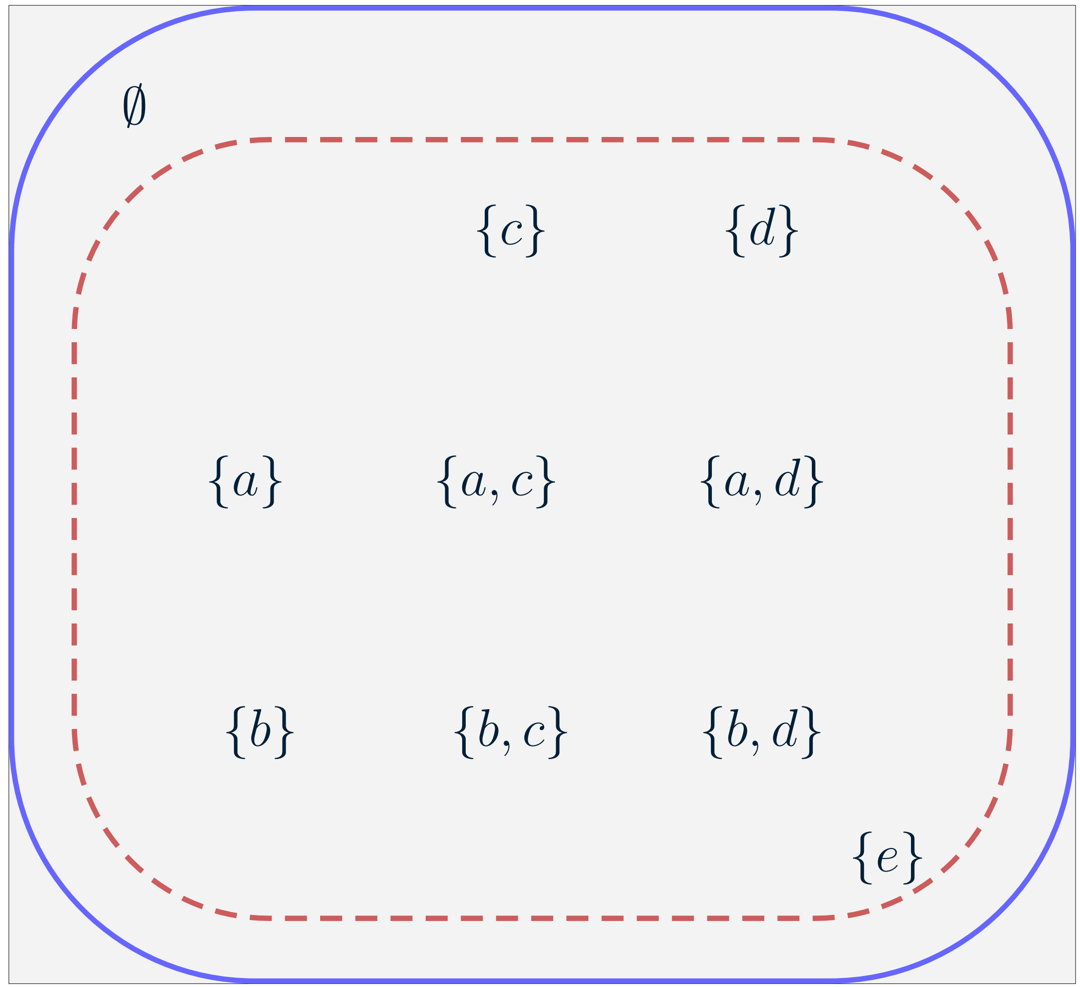


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

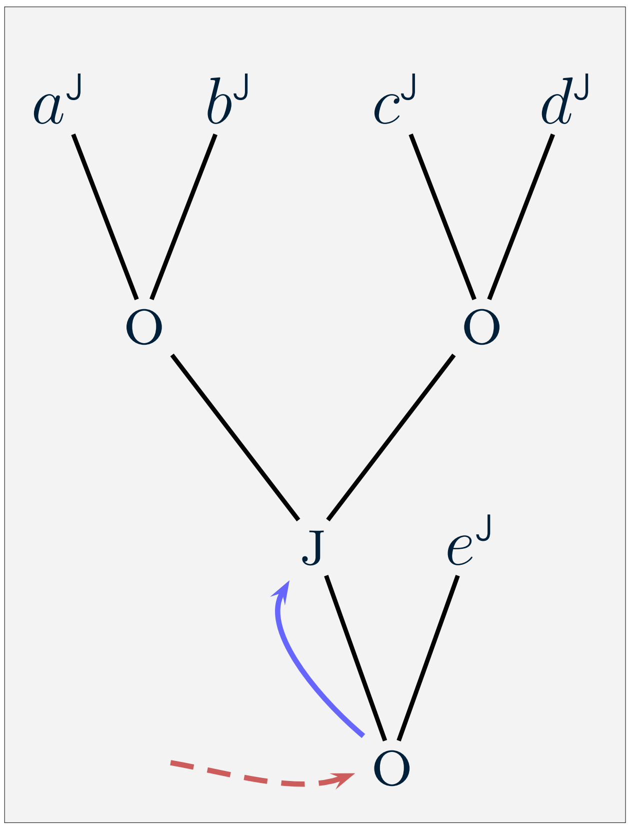


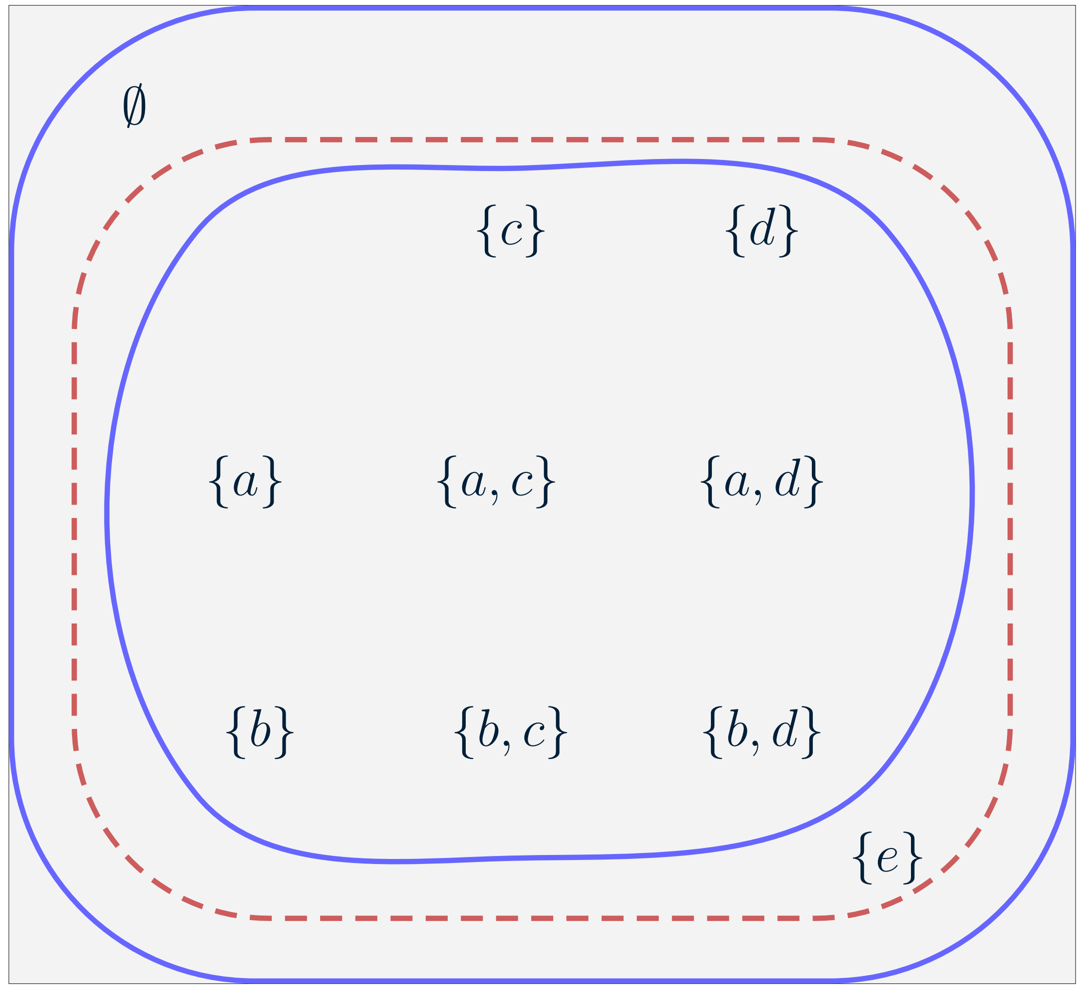


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

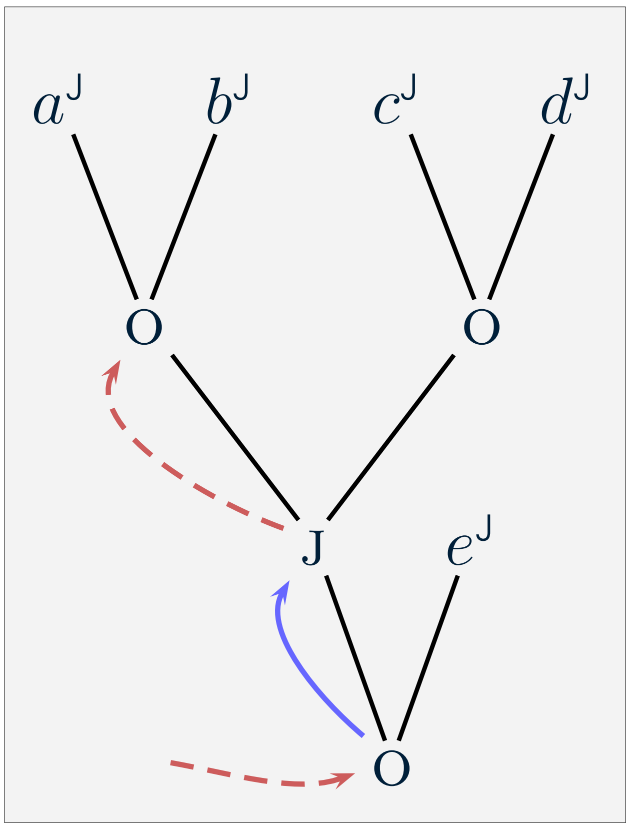


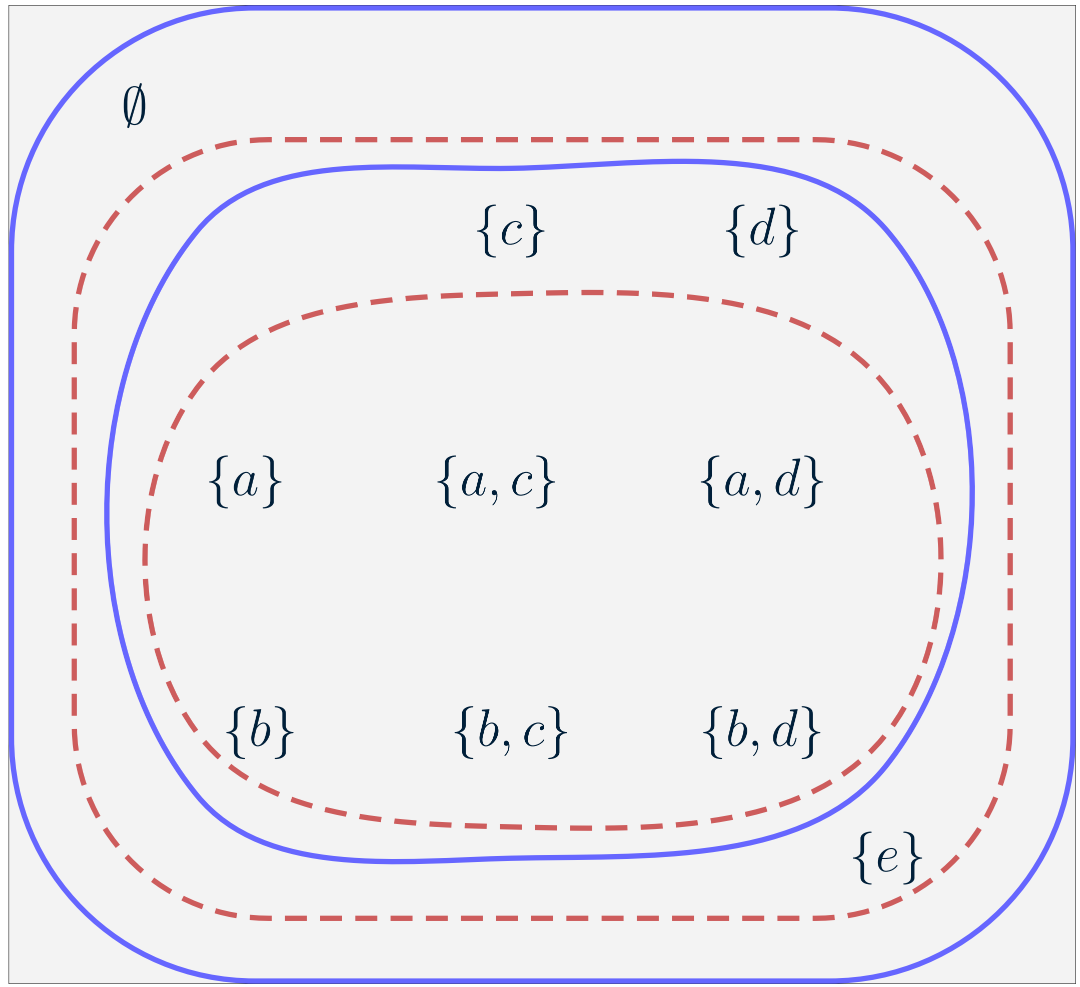


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

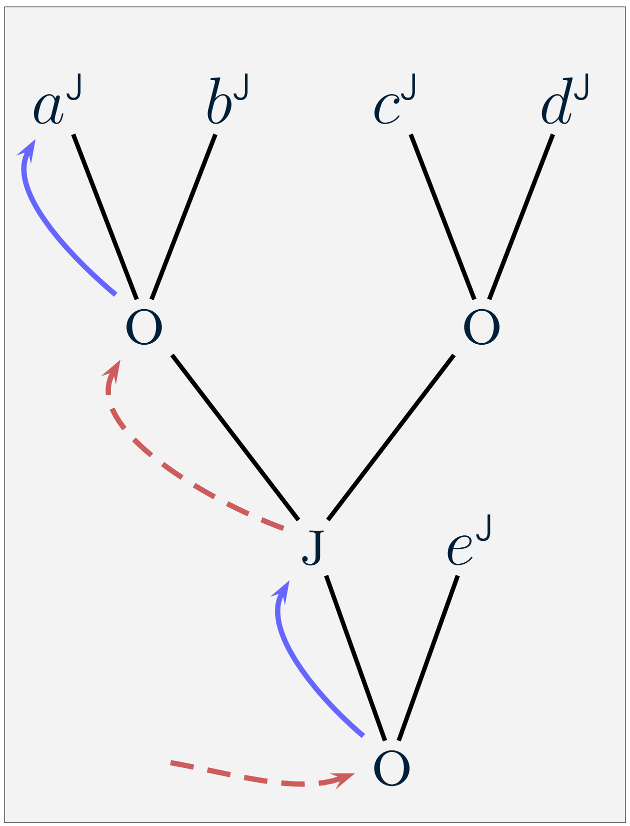


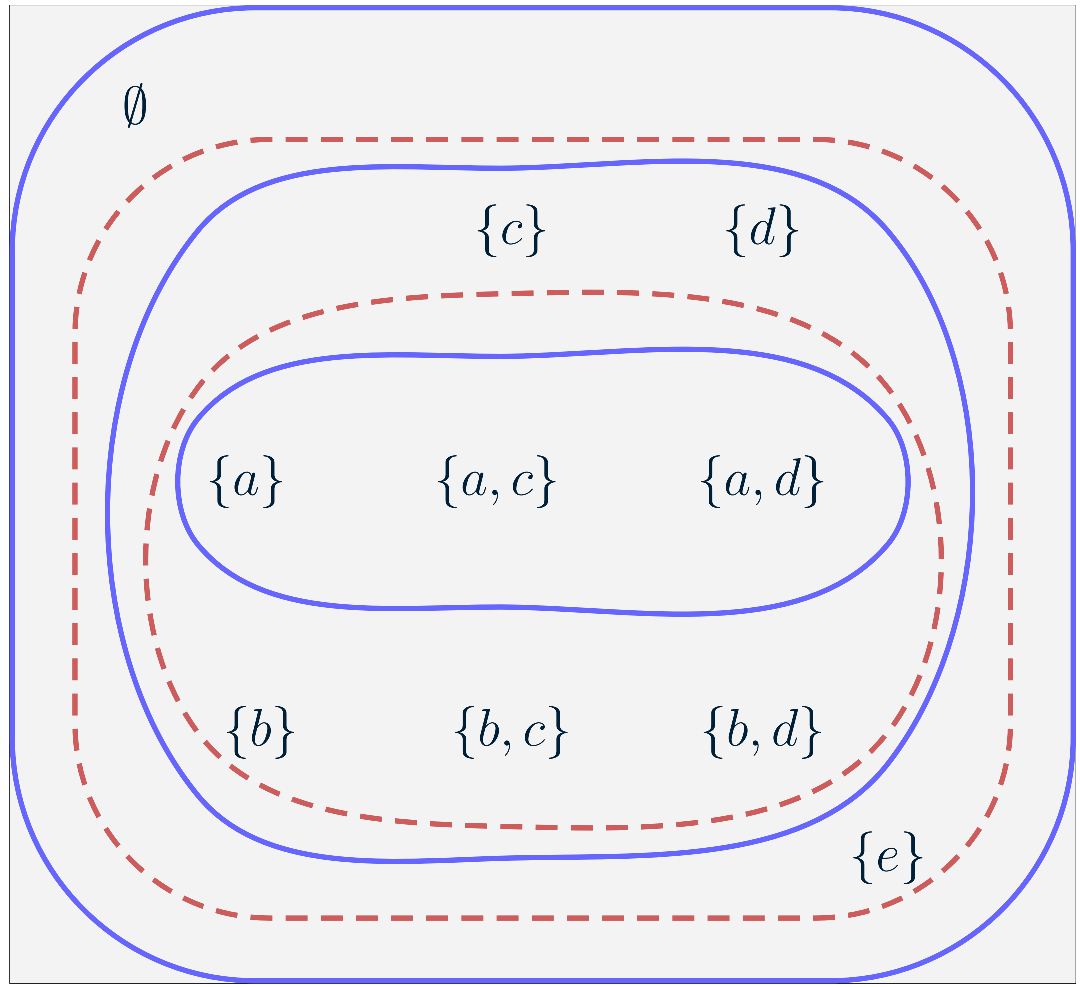


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

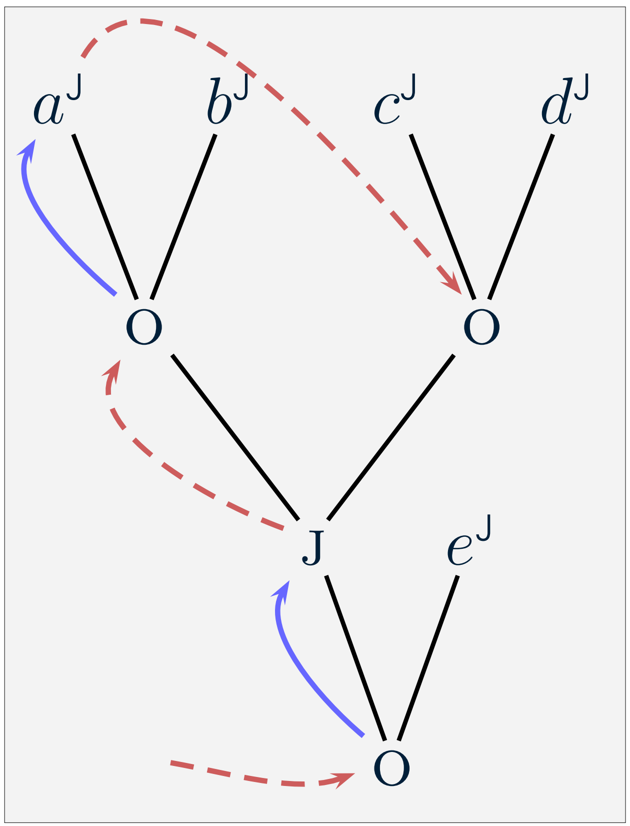


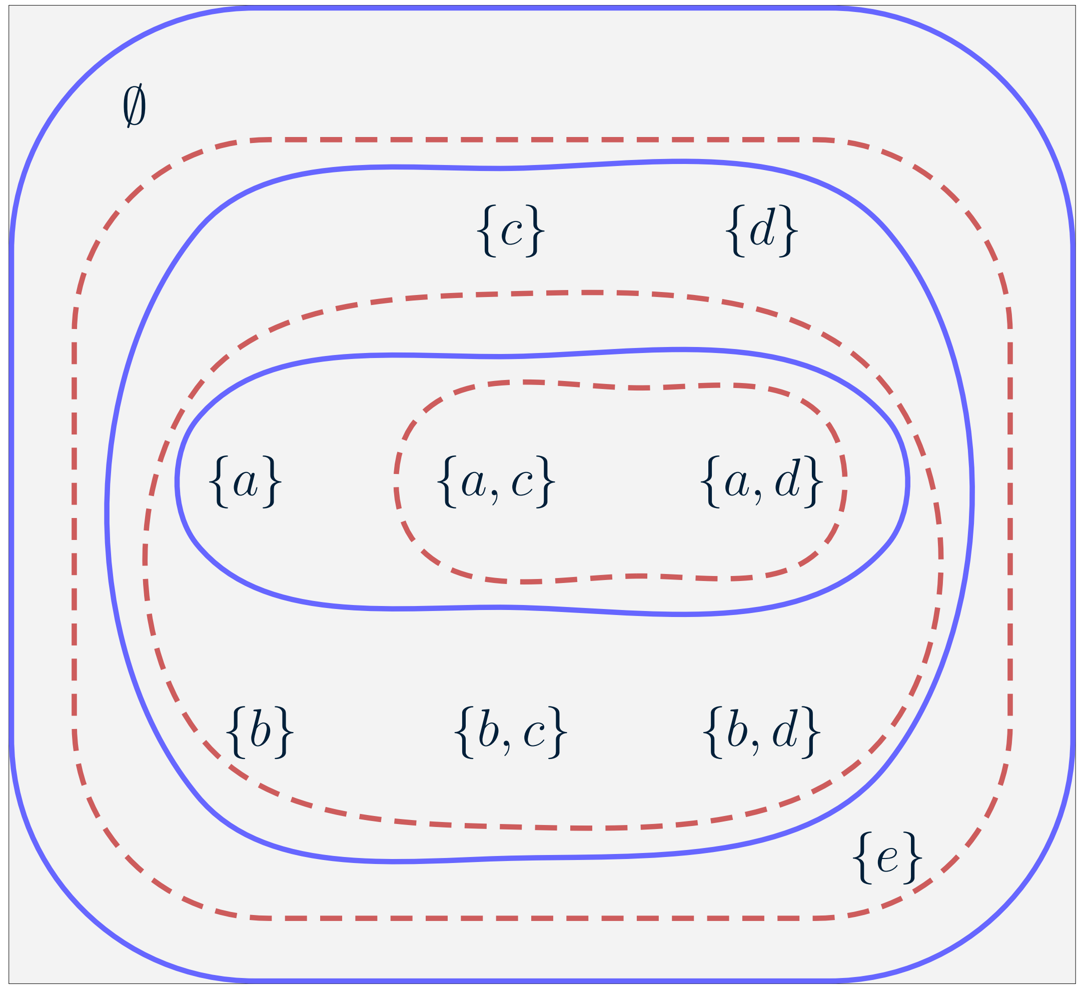


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

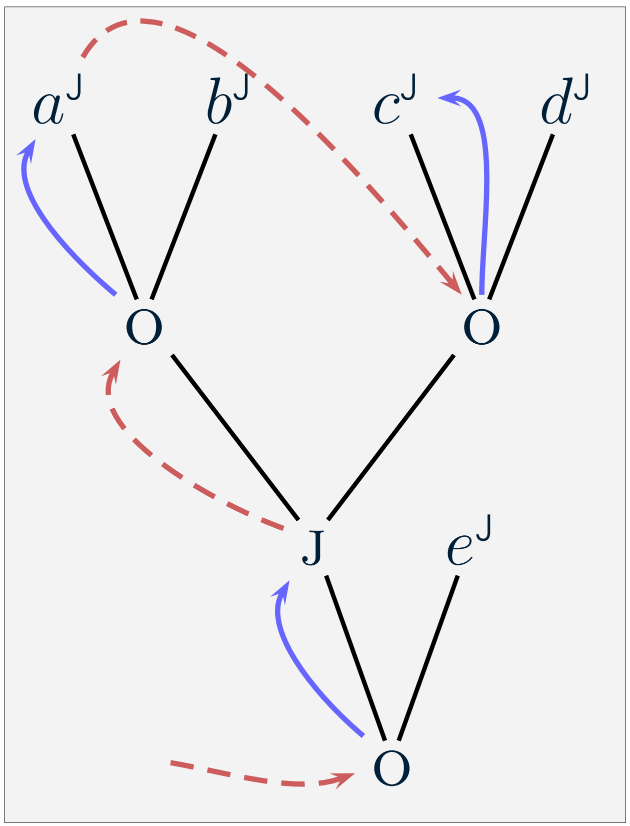


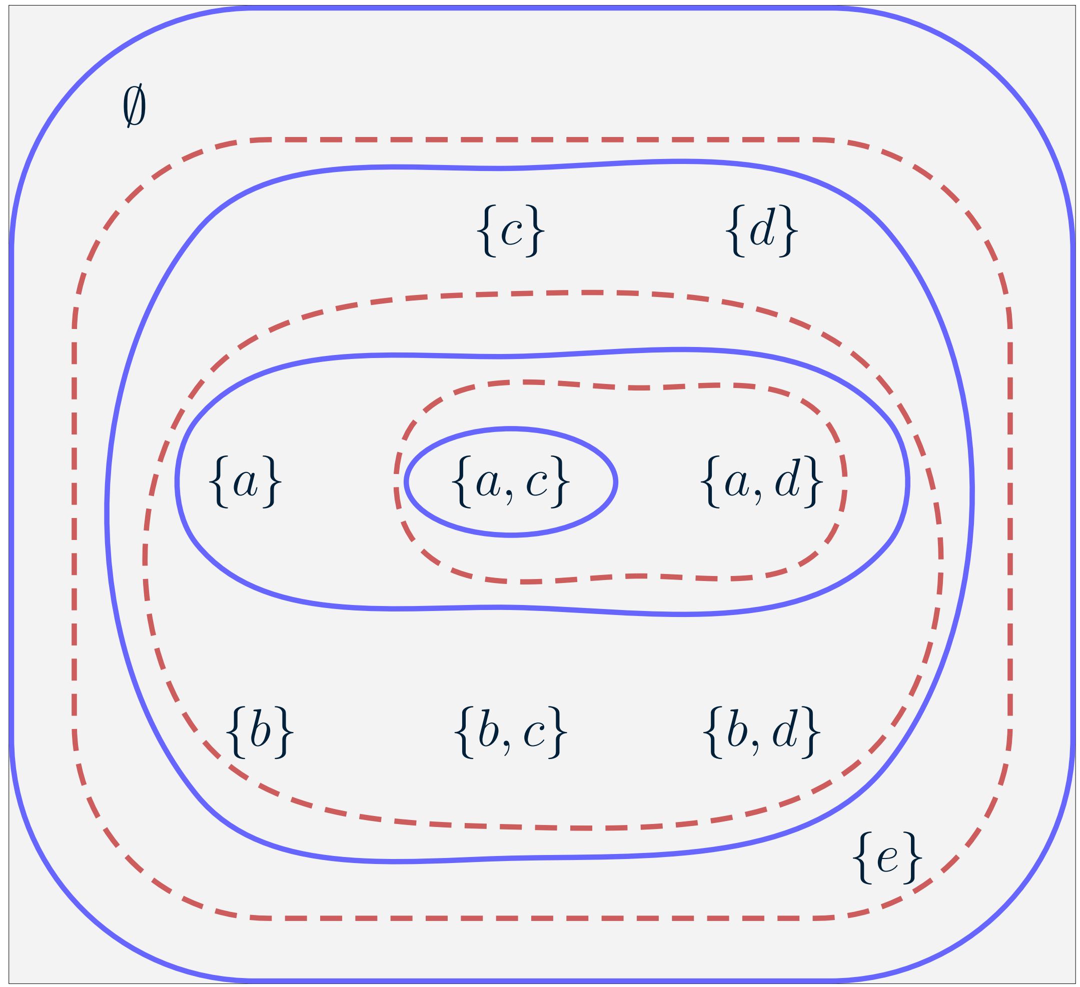


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

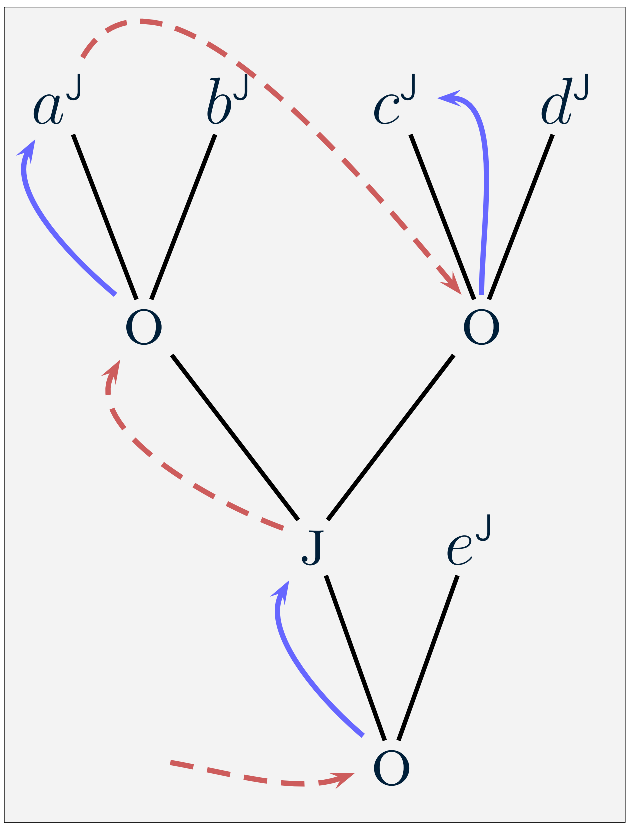


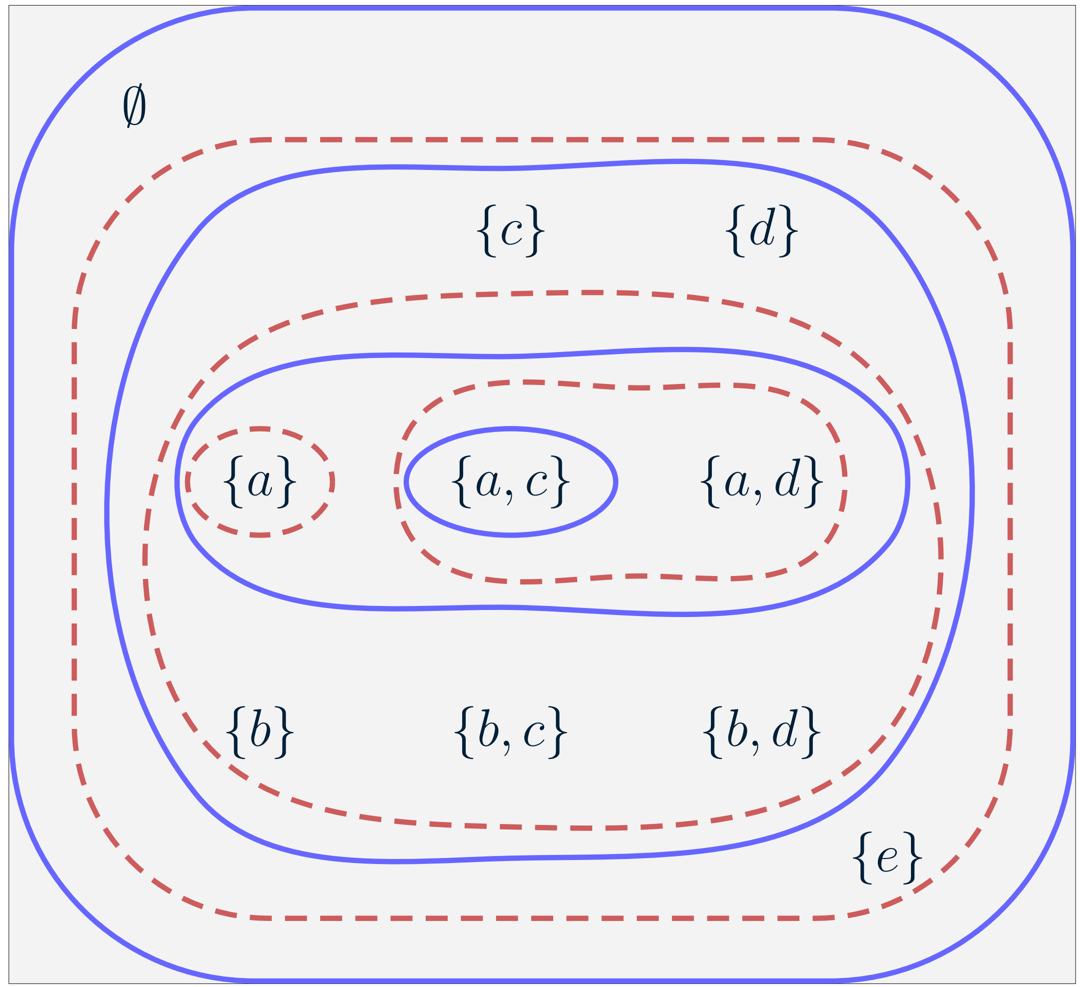


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X





Plan

- Préliminaires
  - espaces de P-cohérence
  - logique linéaire polarisée
  - jeux
- Déploiement d'hypercohérences
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - oubli du temps, réversibilité
- Projection directe des jeux polarisés
  - pointeurs et projection
  - cohérence

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\bigcirc}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\bigcirc} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\bigcirc} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1^{J} a_2^{\circ} a_3^{J} \cdots a_{2n}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1^{\circ} b_2^{J} b_3^{\circ} \cdots b_{2n'}^{J}$$

- bonne terminaison

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\circ} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\circ} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\circ} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\circ} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\circ} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\circ}$$

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathrm{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathrm{J}} \cdots a_{2n}{}^{\bigcirc}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\bigcirc} b_2{}^{\mathrm{J}} b_3{}^{\bigcirc} \cdots b_{2n'}{}^{\mathrm{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathrm{J}} b_2{}^{\bigcirc} b_3{}^{\mathrm{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\bigcirc} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathrm{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathrm{J}} b_1{}^{\bigcirc} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathrm{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\bigcirc}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\circ} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\circ} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\circ} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\circ} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\circ} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\circ}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur
- réversibilité

$$([\pi]_{\mathsf{JP}})^{\curvearrowleft} = [\pi]_{\mathsf{JP}}$$

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\bigcirc}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\bigcirc} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\bigcirc} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\bigcirc} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\bigcirc} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\bigcirc} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\bigcirc}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur
- réversibilité

$$([\pi]_{\mathsf{JP}})^{\curvearrowleft} = [\pi]_{\mathsf{JP}}$$

- oubli du temps

Plan

- Préliminaires
  - espaces de P-cohérence
  - logique linéaire polarisée
  - jeux
- Déploiement d'hypercohérences
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - oubli du temps, réversibilité
- Projection directe des jeux polarisés
  - pointeurs et projection
  - cohérence

Projection directe des jeux polarisés (sans bord)

$$(a_1, b_1)^{\bigcirc} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\bigcirc} \quad b_2^{\mathsf{J}} \quad b_3^{\bigcirc} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\bigcirc} \quad (a_4, b_4)^{\mathsf{J}} \in\, !\bot_g \otimes\, !\bot_d$$

$$\longmapsto \big([*_g, *_g], [*_d]\big)$$

Projection directe des jeux polarisés (sans bord)

$$(a_1, b_1)^{\bigcirc} \quad a_2^{\lrcorner} \quad a_3^{\bigcirc} \quad b_2^{\lrcorner} \quad b_3^{\bigcirc} \quad a_2^{\lrcorner} \quad a_3^{\bigcirc} \quad (a_4, b_4)^{\lrcorner} \in \,!\bot_g \otimes \,!\bot_d$$

$$\longmapsto \big([*_g, *_g], [*_d]\big)$$

Projection directe des jeux polarisés (sans bord)

$$(a_1, b_1)^{\circ} \quad a_2^{\lrcorner} \quad a_3^{\circ} \quad b_2^{\lrcorner} \quad b_3^{\circ} \quad a_2^{\lrcorner} \quad a_3^{\circ} \quad (a_4, b_4)^{\lrcorner} \in\ !\bot_g \otimes !\bot_d$$

$$\mapsto ([*_g, *_g], [*_d])$$

$$(a_1, b_1)^{\circ} \quad (c_1, d_1)^{\lrcorner} \quad c_2^{\circ} \quad a_2^{\lrcorner} \quad c_2^{\circ} \in\ !\bot \otimes (?1_g \parr ?1_g)$$

$$\mapsto ([*_{\bot}], [([*_{1_g}, *_{1_g}], [])])$$

Projection directe des jeux polarisés (sans bord)

$$(a_1, b_1)^{\circ} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\circ} \quad b_2^{\mathsf{J}} \quad b_3^{\circ} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad a_3^{\circ} \quad (a_4, b_4)^{\mathsf{J}} \in {!\bot_g} \otimes {!\bot_d}$$

$$\mapsto ([*_g, *_g], [*_d])$$

$$(a_1, b_1)^{\circ} \quad (c_1, d_1)^{\mathsf{J}} \quad c_2^{\circ} \quad a_2^{\mathsf{J}} \quad c_2^{\circ} \in {!\bot} \otimes ({?1_g} \parr {?1_g})$$

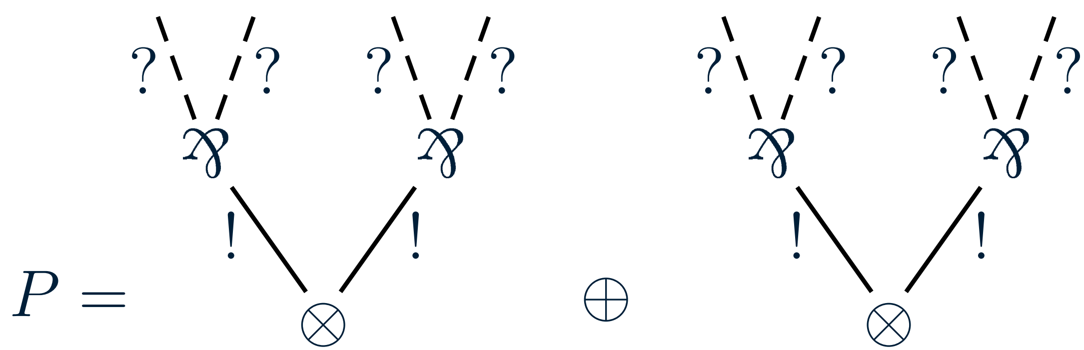
$$\mapsto ([*_\bot], [([*_{1_g}, *_{1_g}], [])])$$

$$\begin{tikzcd}
 & & 1_g^+ \arrow[d] & 1_d^+ \arrow[dl] \\
\bot^- \arrow[dr] & & \parr^- \arrow[dl] & \\
 & \otimes^+ & &
\end{tikzcd}$$

WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes ! \parr ? \bigotimes ! \parr ? \dots \qquad (!(N \mathbin{\&} N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$



WMLLP

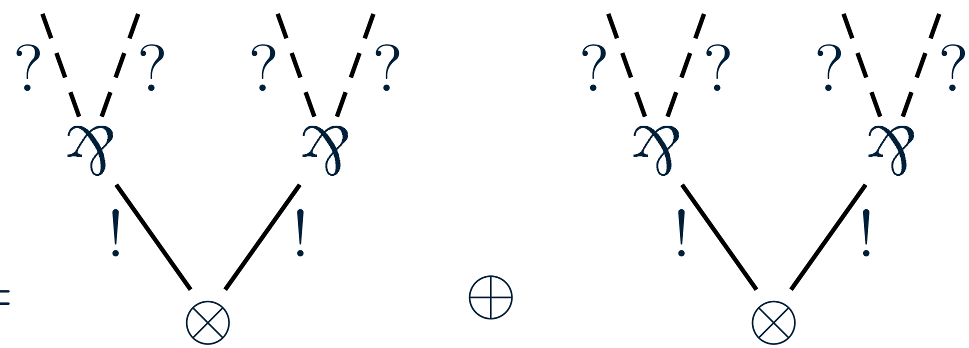
- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\invamp ? \bigotimes !\invamp ? \ldots \qquad (!(N \mathbin{\&} N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

$P =$



WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\parr ? \bigotimes !\parr ? \dots \qquad (!(N \mathbin{\&} N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

- Simplification : WMLLP sans contraction, ni additifs

WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\bigparr ? \bigotimes !\bigparr ? \dots \qquad (!(N \mathbin{\&} N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

- Simplification : WMLLP sans contraction, ni additifs
  - Rel : $|!N| = |N| + \{*\}$ et promotion simplifiée

WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\wp ? \bigotimes !\wp ? \dots \qquad (!(N \mathbin{\&} N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

- Simplification : WMLLP sans contraction, ni additifs
  - Rel : $|!N| = |N| + \{*\}$ et promotion simplifiée
  - point $=$ sous-arbre enraciné de la formule

WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\bigparr ? \bigotimes !\bigparr ? \ldots \qquad (!(N \,\&\, N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

- Simplification : WMLLP sans contraction, ni additifs
  - Rel : $|!N| = |N| + \{*\}$ et promotion simplifiée
  - point $=$ sous-arbre enraciné de la formule
  - uniforme $=$ non uniforme

WMLLP

- Toute formule positive de LLPol peut s'écrire :

$$P = \bigoplus \bigotimes !\parr ? \bigotimes !\parr ? \dots \quad (!(N \,\&\, N) \cong !N \otimes !N \text{ etc.})$$

  - Permet de définir la projection sur les jeux polarisés

$$\forall \pi, p([\pi]_{\mathsf{JP}}) \subseteq [\pi]_{\mathsf{R}}$$

- Simplification : WMLLP sans contraction, ni additifs
  - Rel : $|!N| = |N| + \{*\}$ et promotion simplifiée
  - point $=$ sous-arbre enraciné de la formule
  - uniforme $=$ non uniforme
  - sém. multicohérente $=$ sém. hypercohérente

Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?

Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?
  - Arbre intersection $m = \cap p_i$ et arbre union $M = \cup p_i$

Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?
  - Arbre intersection $m = \cap p_i$ et arbre union $M = \cup p_i$
  - On colorie les nœuds de m qui ont un fils dans M qui n'est pas dans m :

Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?
  - Arbre intersection $m = \cap p_i$ et arbre union $M = \cup p_i$
  - On colorie les nœuds de m qui ont un fils dans M qui n'est pas dans m :
    - en rouge les nœuds négatifs
    - en vert les nœuds positifs

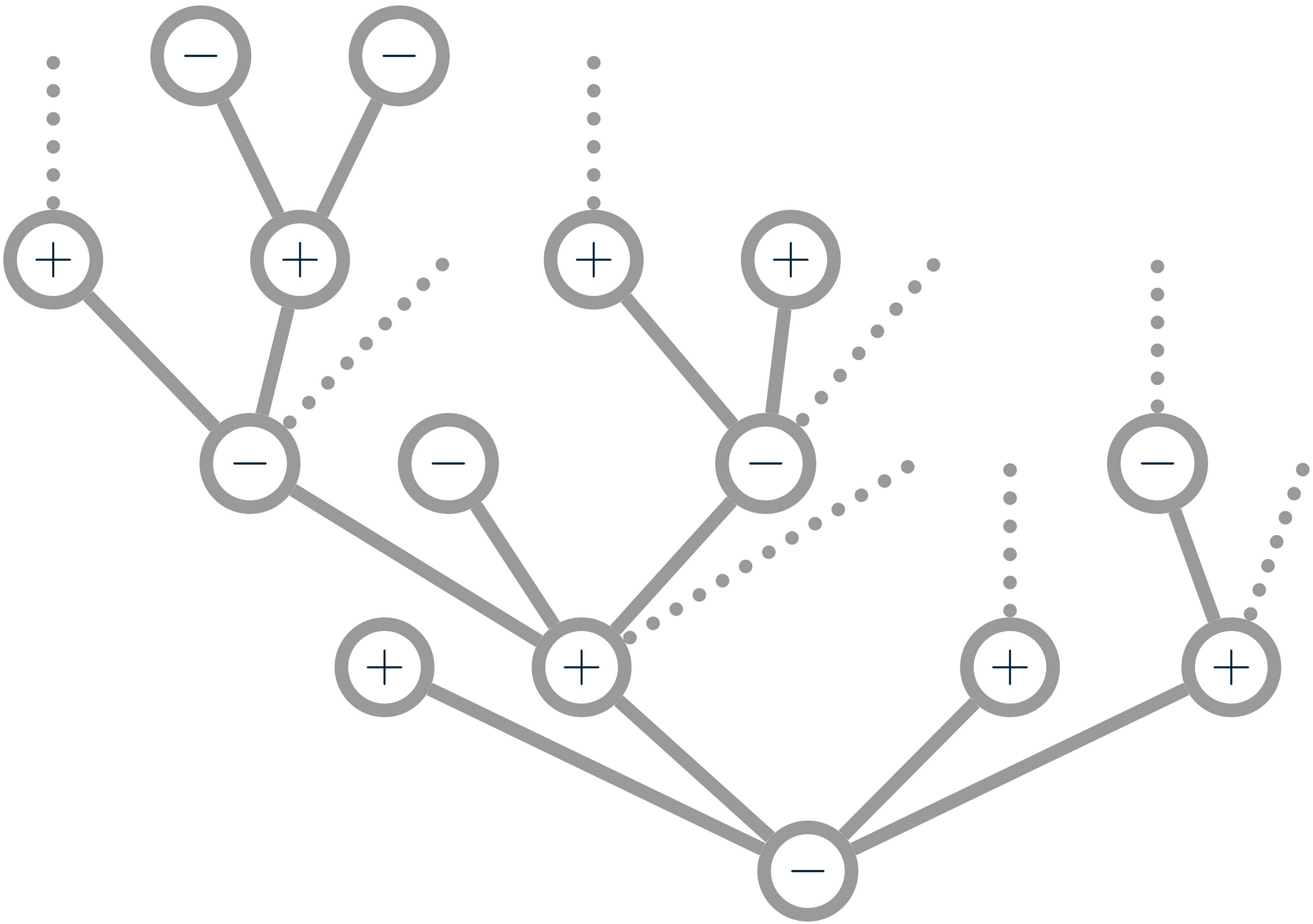
Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?
  - Arbre intersection $m = \cap p_i$ et arbre union $M = \cup p_i$
  - On colorie les nœuds de m qui ont un fils dans M qui n'est pas dans m :
    - en rouge les nœuds négatifs
    - en vert les nœuds positifs
  - La famille est cohérente ssi il existe un sous-arbre de m, déterministe pour le positif, maximal et tel que tout nœud rouge est dominé par un nœud vert.

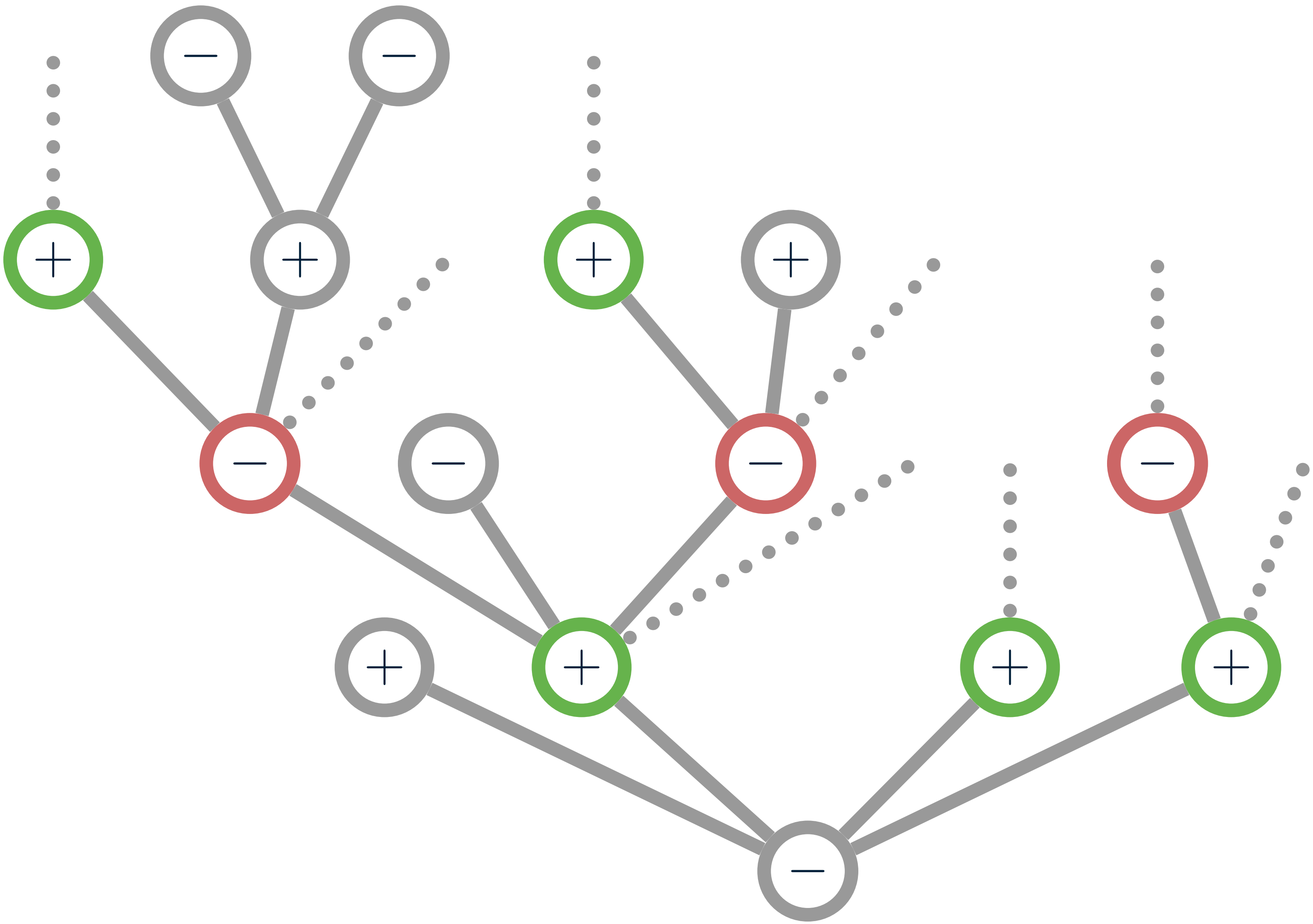
Cohérence dans WMLLP

- Cohérence d'une famille de points $p_1, \ldots, p_n$?
  - Arbre intersection $m = \cap p_i$ et arbre union $M = \cup p_i$
  - On colorie les nœuds de m qui ont un fils dans M qui n'est pas dans m :
    - en rouge les nœuds négatifs
    - en vert les nœuds positifs
  - La famille est cohérente ssi il existe un sous-arbre de m, déterministe pour le positif, maximal et tel que tout nœud rouge est dominé par un nœud vert.
- Remarque : la cohérence ne dépend que de m et M.

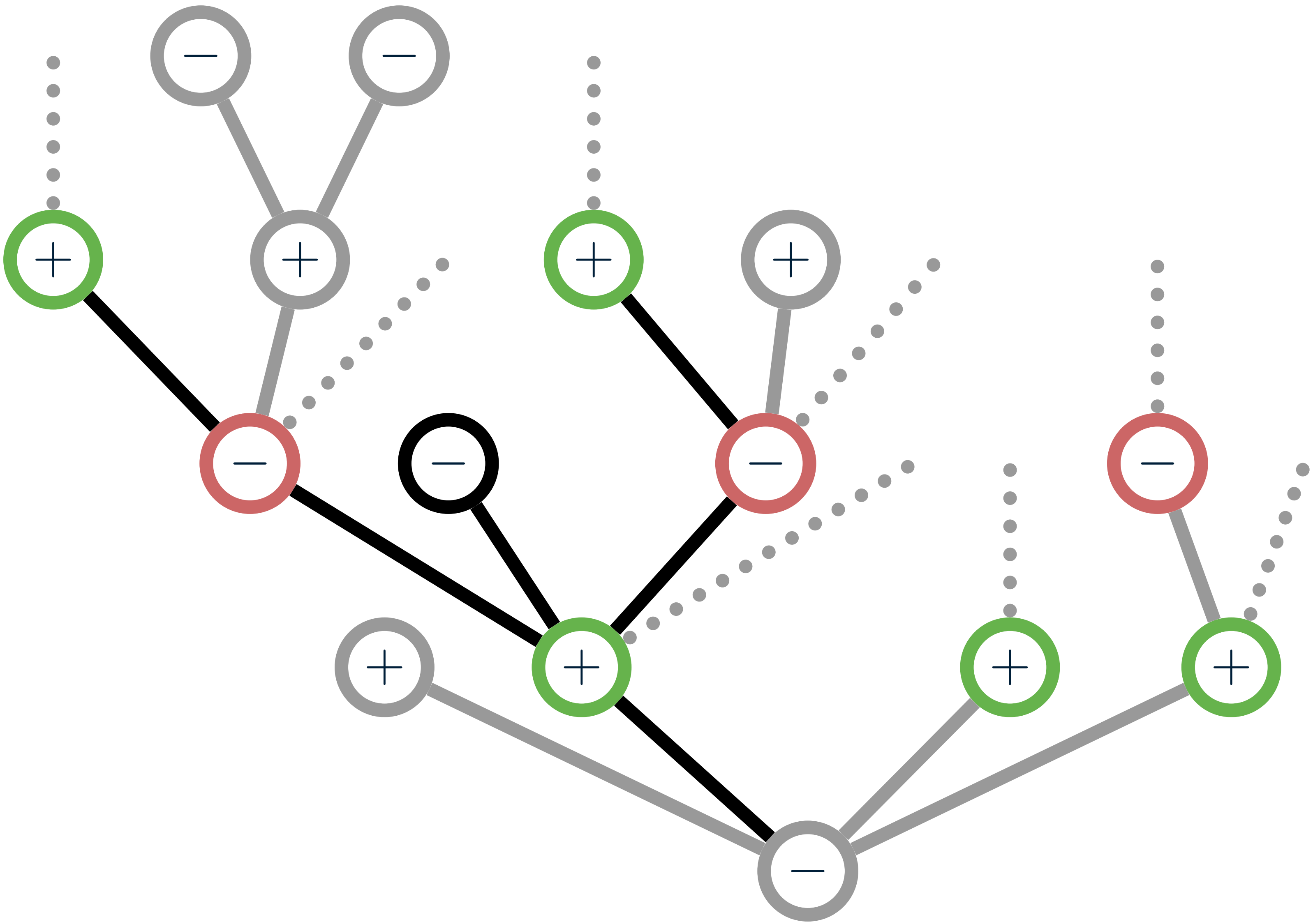
Cohérence dans WMLLP



Cohérence dans WMLLP



Cohérence dans WMLLP



Annexes

Modèle relationnel

$$\frac{}{\vdash A, A^{\perp} : \{(a,a) \mid a \in |A|\}} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Delta, A^{\perp} : g}{\vdash \Gamma, \Delta : \{(\gamma,\delta) \mid \exists a \in |A|, (\gamma,a) \in f \text{ et } (\delta,a) \in g\}}$$

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top : \emptyset}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Gamma, B : g}{\vdash \Gamma, A \& B : f \cup g} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f}{\vdash \Gamma, A \oplus B : f}$$

$$\frac{\vdash \Gamma : f}{\vdash \Gamma, \perp : f \times \{*_{\perp}\}} \qquad \frac{}{\vdash 1 : \{*_1\}}$$

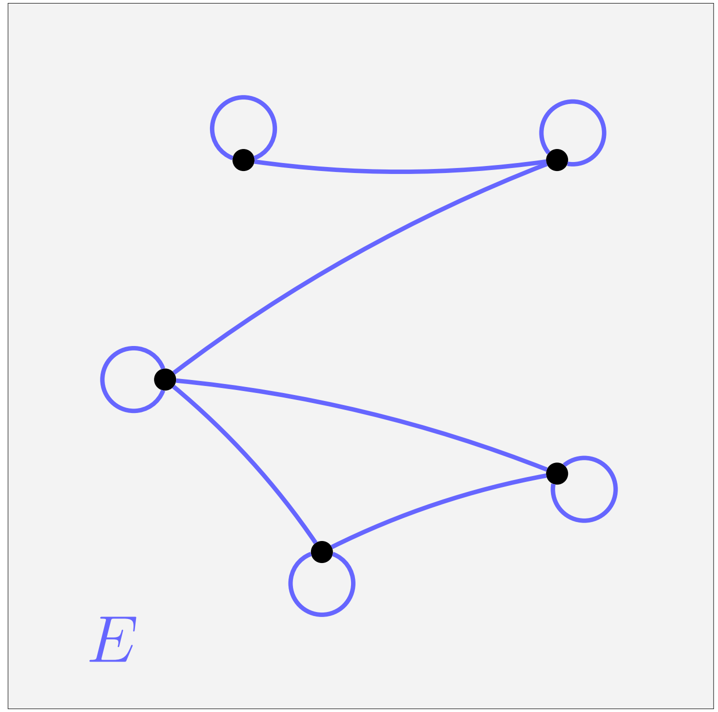
$$\frac{\vdash \Gamma, A, B : f}{\vdash \Gamma, A \parr B : f} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A : f \qquad \vdash \Delta, B : g}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B : \{(\gamma, \delta, (a,b)) \mid (\gamma,a) \in f, (\delta,b) \in g\}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, [a]) \mid (\gamma, a) \in f\}} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, x_1 + x_2) \mid (\gamma, x_1, x_2) \in f\}}$$

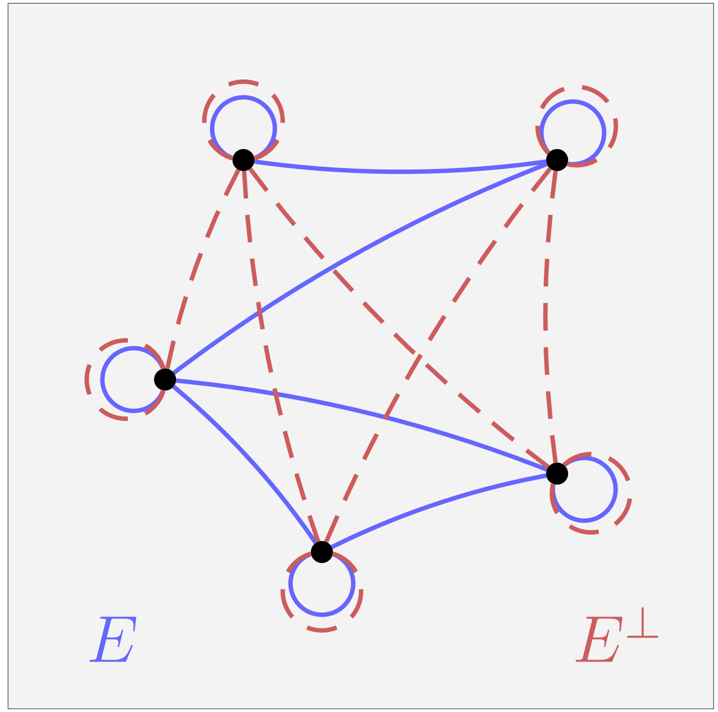
$$\frac{\vdash \Gamma : f}{\vdash \Gamma, ?A : \{(\gamma, []) \mid (\gamma) \in f\}} \qquad \frac{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, A : f}{\vdash ?A_1, \ldots, ?A_n, !A : f^{\dagger}}$$

où $f^{\dagger} = \{(\sum_{1 \leq j \leq k} x_1^j, \ldots, \sum_{1 \leq j \leq k} x_n^j, [a_1, \ldots, a_k]) \mid k \in \mathbb{N}, \forall j, (x_1^j, \ldots, x_n^j, a_j) \in f\}$

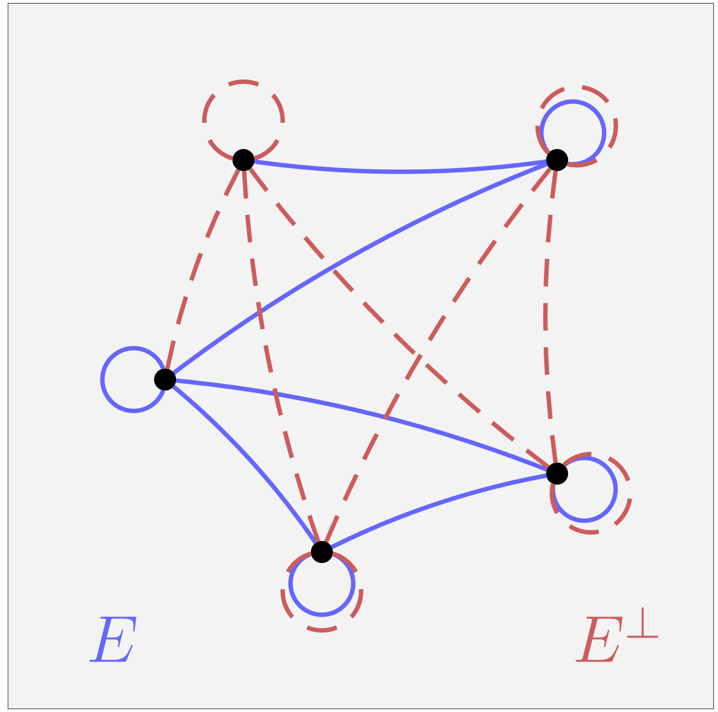
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



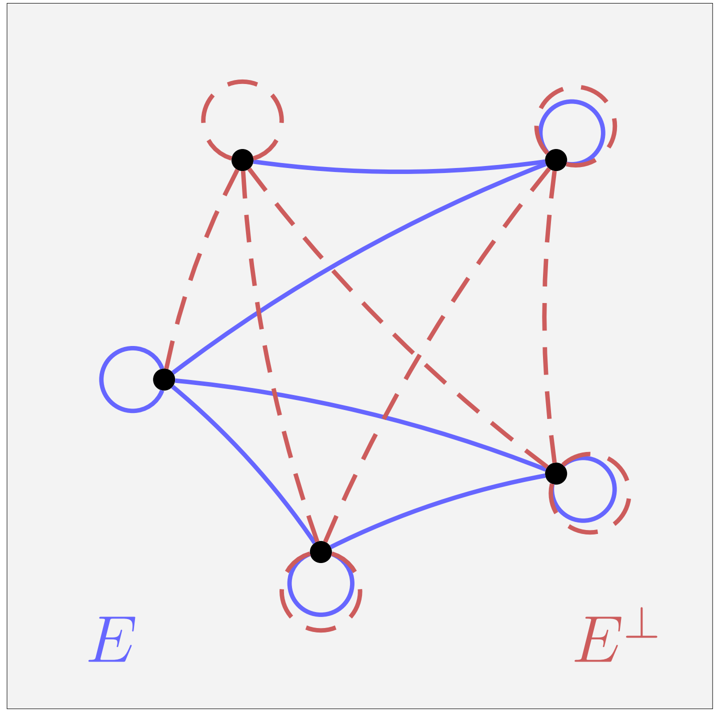
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



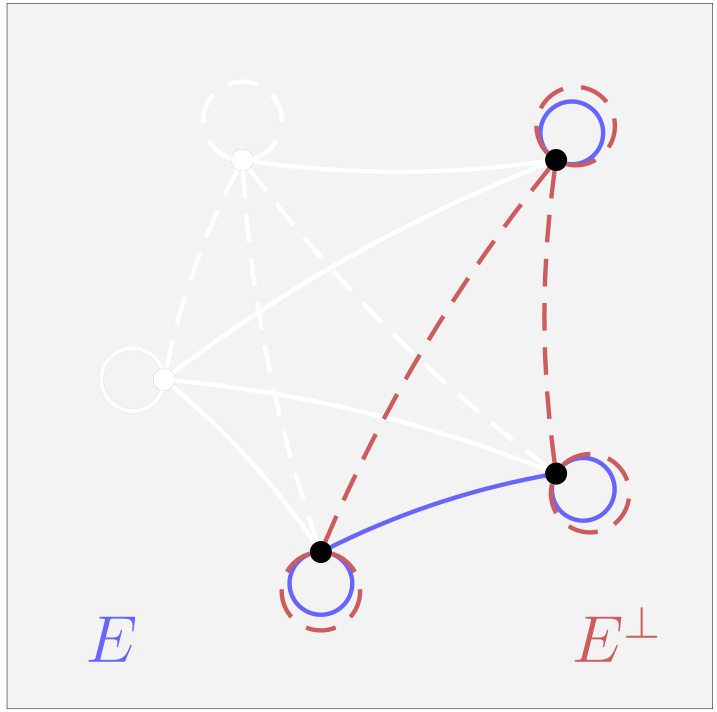
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors \{ si}\ b\ \texttt{alors v sinon f \}}$$
$$\texttt{sinon \{ si}\ b\ \texttt{alors v sinon f \}}$$

$$\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$$

Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ \texttt{v}\ \texttt{sinon}\ \texttt{f}\ \}$$
$$\texttt{sinon}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ \texttt{v}\ \texttt{sinon}\ \texttt{f}\ \}$$

$$\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$$

Multicohérences

Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

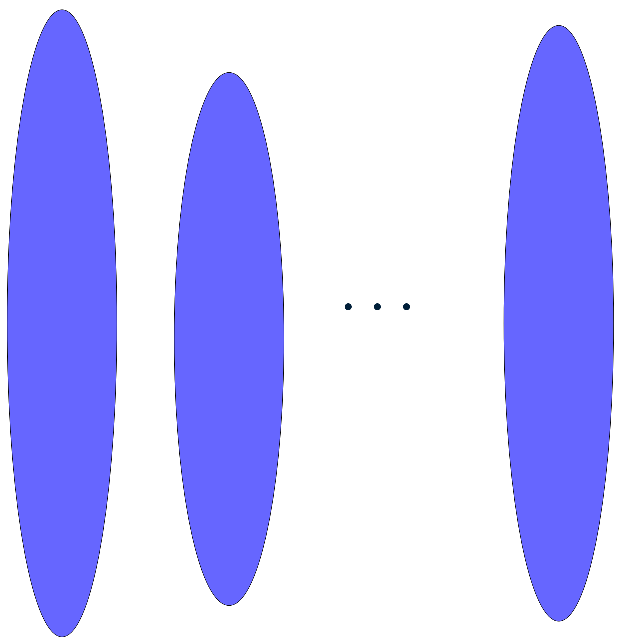
Multicohérences

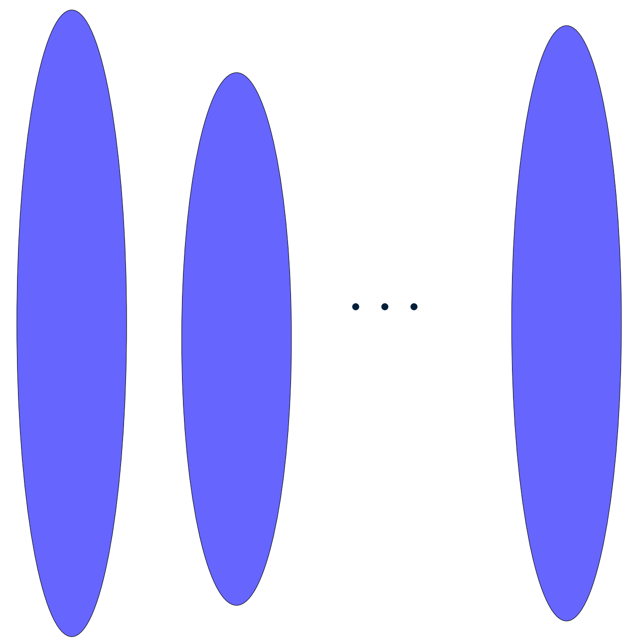
Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad\qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

Cohérence dans le *bien sûr* :

$$\{x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n\} \qquad\qquad [x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n]$$





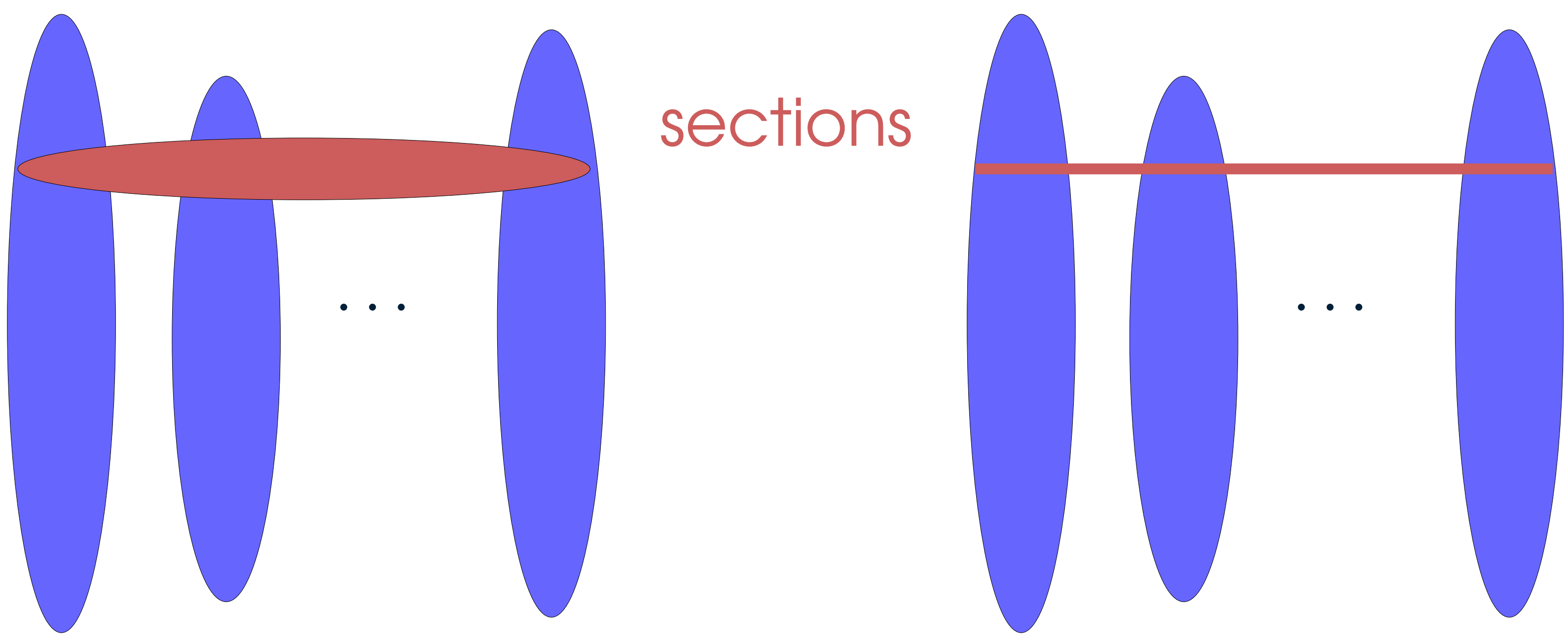
Multicohérences

Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad\qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

Cohérence dans le *bien sûr* :

$$\{x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n\} \qquad\qquad [x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n]$$



Multicohérences $\neq$ hypercohérences

bool

`v`

`f`

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

!bool

$\{\mathtt{v}\}$

$\{\mathtt{f}\}$

$\emptyset$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{!bool} & \otimes & \mathbf{!bool} & \otimes & \mathbf{!bool} \\
(\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) \\
(\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) \\
(\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\})
\end{array}
$$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{rccccccc}
G = & !\textbf{bool} & \otimes & !\textbf{bool} & \otimes & !\textbf{bool} & \multimap & \textbf{bool} \\
a = & ((\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) & , & \mathtt{v}) \\
b = & ((\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) & , & \mathtt{v}) \\
c = & ((\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\}) & , & \mathtt{v})
\end{array}
$$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{rccccccc}
G = & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \multimap & \mathbf{bool} \\
a = & ((\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) & , & \mathtt{v}) \\
b = & ((\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) & , & \mathtt{v}) \\
c = & ((\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\}) & , & \mathtt{v})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & !G & \multimap & \mathbf{bool} & \\
f = & \{ & (\{a, b\} & , & \mathtt{v}), & \\
 & & (\{c\} & , & \mathtt{f}) & \}
\end{array}
$$