Institut Galilée — Algorithmique, arbres et graphes
Année 2005-2006 — L2

Devoir

Exercice 1 (Notation asymptotique)**.**

1. *Ces phrases ont elles un sens (expliquer) :*
   – *le nombre de comparaisons pour ce tri est au plus* $\Omega(n^3)$ *;*
   – *en pire cas on fait au moins* $\Theta(n)$ *échanges.*
2. *Est-ce que* $2^{n+1} = O(2^n)$ *? Est-ce que* $2^{2n} = O(2^n)$ *?*
3. *Démontrer :*

$$\text{si } f(n) = O(g(n)) \text{ et } g(n) = O(h(n)) \text{ alors } f(n) = O(h(n)) \tag{1}$$

$$\text{si } f(n) = O(g(n)) \text{ alors } g(n) = \Omega(f(n)) \tag{2}$$

$$\text{si } f(n) = \Omega(g(n)) \text{ alors } g(n) = O(f(n)) \tag{3}$$

$$\text{si } f(n) = \Theta(g(n)) \text{ alors } g(n) = \Theta(f(n)) \tag{4}$$

Exercice 2 (Complexité en moyenne du tri bulle)**.**
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre moyen d'échanges effectués au cours d'un tri bulle. On considère l'implémentation suivante du tri bulle :

```
void tribulle(tableau_t *t){
  int n, k, fin;
  for (n = taille(t) - 1; n >= 1; n--) {
    /* Les éléments d'indices supérieurs à n sont à la bonne place. */
    fin = 1;
    for (k = 0; k < n; k++){
      if ( cmptab(t, k, k + 1) < 0 ){
        echangetab(t, k, k + 1);
        fin = 0;
      }
    }
    if (fin) break; /* Les éléments entre 0 et n - 1 sont bien ordonnés */
  }
}
```

On considère le tableau passé en entrée comme une permutation des entiers de 0 *à* $n-1$ *que le tri remettra dans l'ordre* $0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$*. Ainsi, pour* $n = 3$*, on considère qu'il y a* 6 *entrées possibles :* $0,\ 1,\ 2$ *;* $0,\ 2,\ 1$ *;* $1,\ 0,\ 2$ *;* $1,\ 2,\ 0$ *;* $2,\ 0,\ 1$ *et* $2,\ 1,\ 0$*.*

On fait l'hypothèse que toutes les permutations sont équiprobables.

Une inversion dans une entrée $a_0, \dots, a_{n-1}$ *est la donnée de deux indices* i *et* j *tels que* $i < j$ *et* $a_i > a_j$*.*

1. *Combien y a t-il d'inversions dans la permutation* $0,\ 1\ \dots,\ n-1$ *? Et dans la permutation* $n-1,\ n-2,\ \dots,\ 0$ *?*
2. *Montrer que chaque échange dans le tri bulle élimine exactement une inversion.*
3. *En déduire une relation entre le nombre total d'inversions dans toutes les permutations de* $0,\ \dots,\ n-1$ *et le nombre moyen d'échanges effectués par le tri bulle sur ces entrées.*

L'image miroir de la permutation $a_0, a_1 \dots, a_{n-1}$ *est la permutation* $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$*.*

4. *Montrer que l'ensemble des permutations de* $0,\ \dots,\ n-1$ *est en bijection avec lui-même par image miroir.*
5. *Si* (i, j) *est une inversion dans la permutation* $a_0, a_1 \dots, a_{n-1}$*, qu'en est-il dans son image miroir ? Réciproquement ? En déduire le nombre moyen d'inversions dans une permutation des entiers de* 0 *à* $n-1$ *et le nombre moyen d'échanges effectués par le tri bulle.*