Éléments d'informatique – Cours 11. Pile d'appel, fonctions récursives.

Pierre Boudes

7 décembre 2011

Ce semestre

- Éléments d'architecture des ordinateurs (+mini-assembleur)
- Éléments de systèmes d'exploitation
- Programmation structurée impérative (éléments de langage C)
  - Structure d'un programme C
  - Variables : déclaration (et initialisation), affectaction
  - Évaluation d'expressions, expressions booléennes
  - Instructions de contrôle : if, for, while
  - Types de données : entiers, caractères, réels, tableaux, struct
  - Fonctions d'entrées/sorties (scanf/printf)
  - Écriture et appel de fonctions
  - Débogage
- Notions de compilation
  - Analyse lexicale, analyse syntaxique, analyse sémantique ; préprocesseur du C (include, define) ; Édition de lien
- Algorithmes élémentaires
- Méthodologie de résolution, manipulation sous linux

Contenu du semestre

Pile d'appel (rappels)

- Rappel sur les fonctions en C
- Traces et mémoire
- Pile d'appel

Fonctions récursives

- Définition et analogie mathématique
- Exemple de la factorielle
- Pour aller plus loin
- Exemples

Rappel sur les fonctions en C

Utilisation des fonctions :

- *déclaration* (types des paramètres et de la valeur de retour)
- *définition* (code, paramètres formels)
- *appel* (paramètres effectifs, **espace mémoire**)

Voyons de manière plus précise cette question d'espace mémoire.

Traces et mémoire

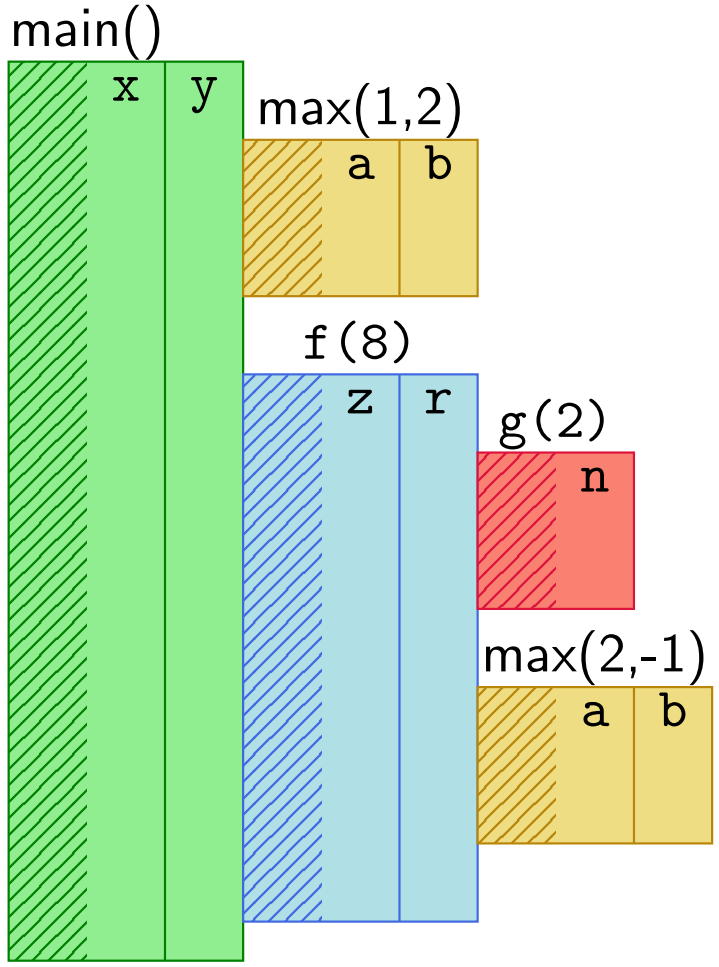
Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

Traces et mémoire

Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

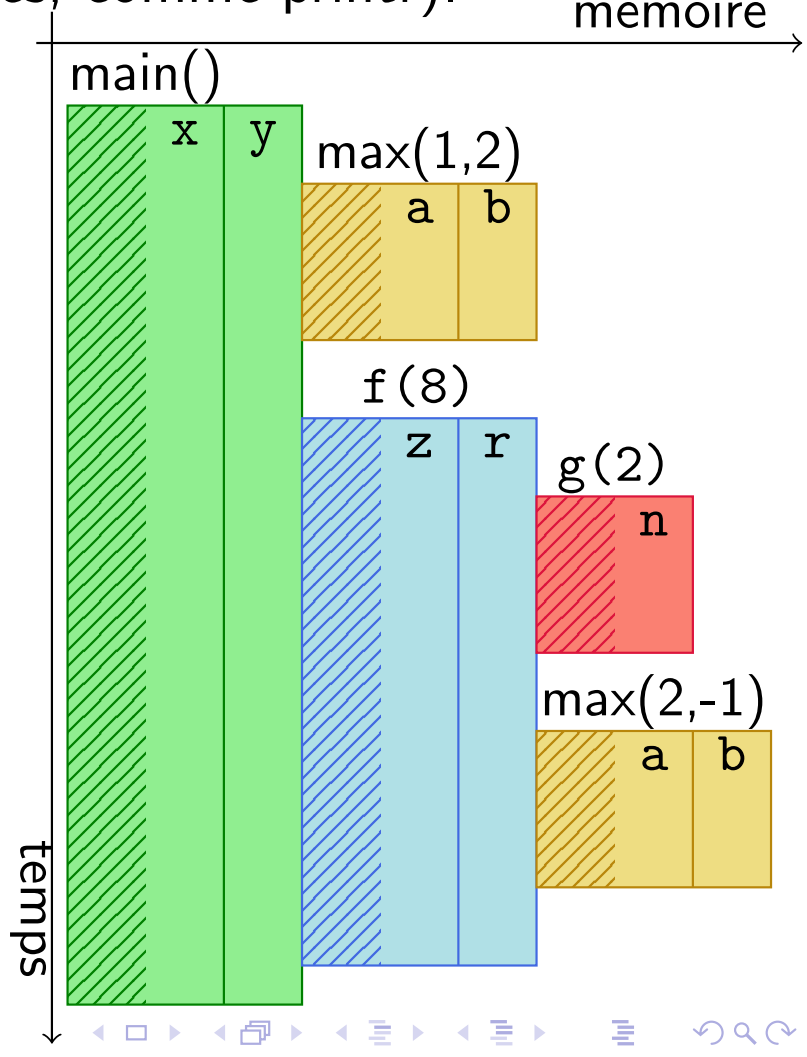


Traces et mémoire

Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

- verticalement, c'est le temps
- et horizontalement, l'occupation mémoire

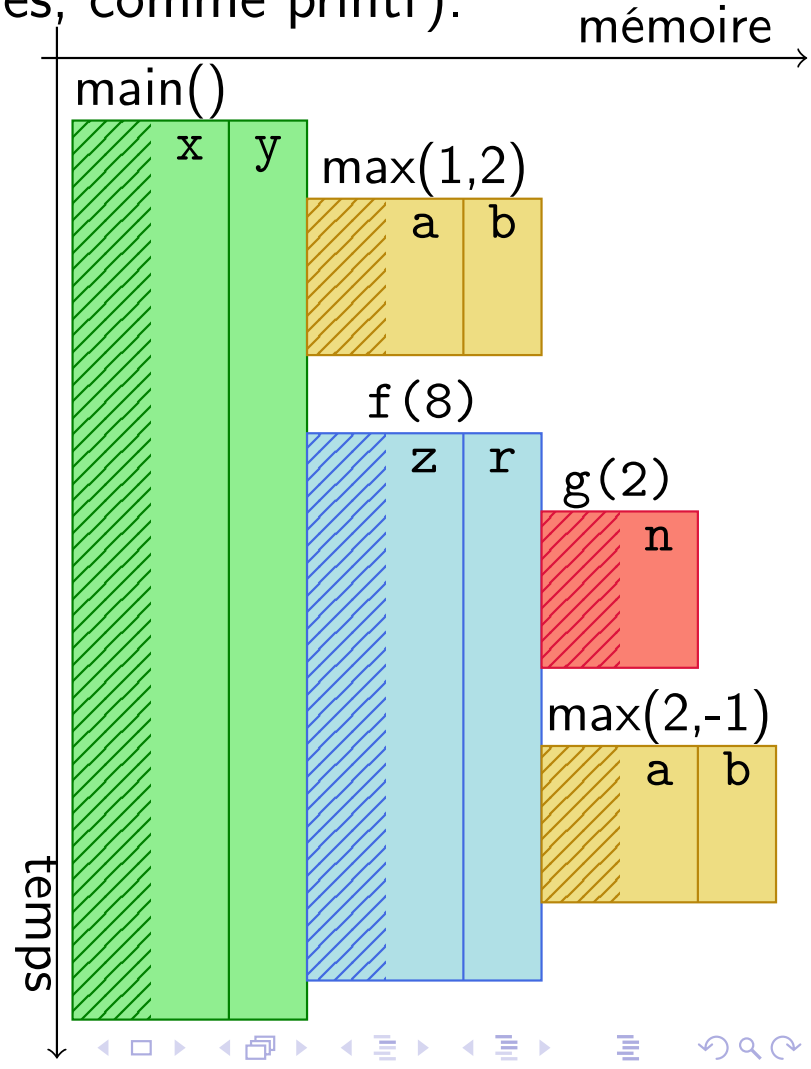


Traces et mémoire

Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

- verticalement, c'est le temps
- et horizontalement, l'occupation mémoire
- un appel de fonction occupe une portion de mémoire, puis la libère.

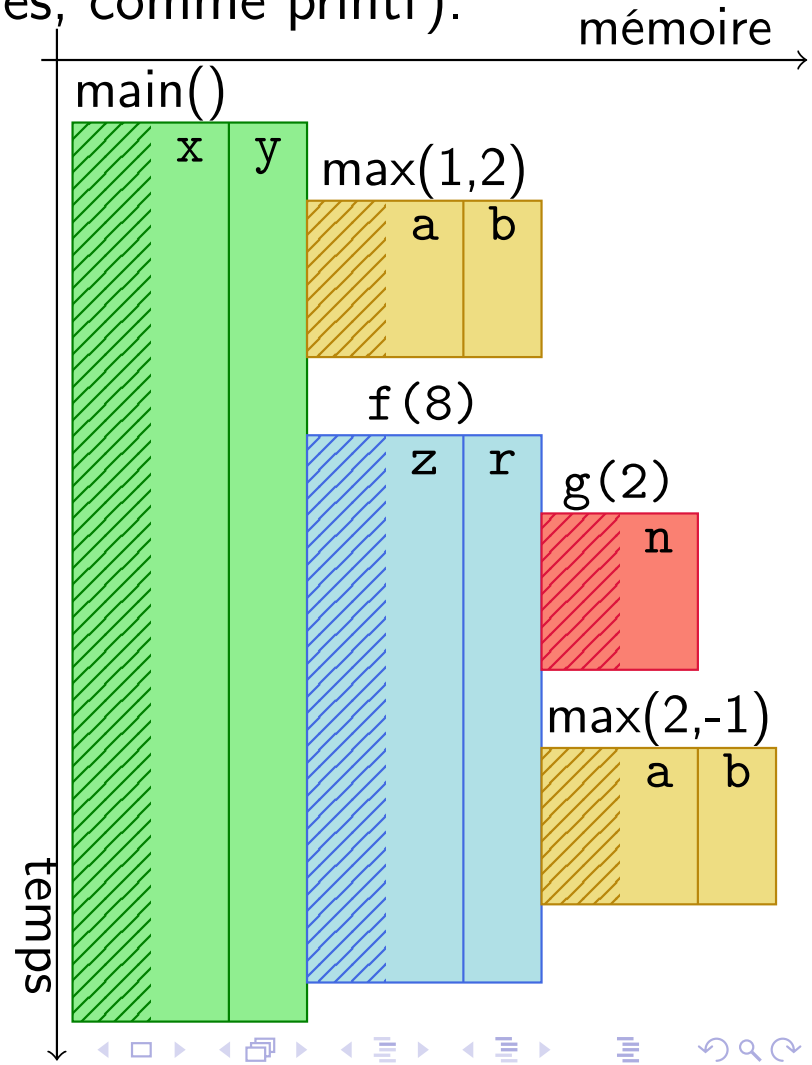


Traces et mémoire

Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

- verticalement, c'est le temps
- et horizontalement, l'occupation mémoire
- un appel de fonction occupe une portion de mémoire, puis la libère.
- la trace représente réellement ce qui arrive dans vos programmes.



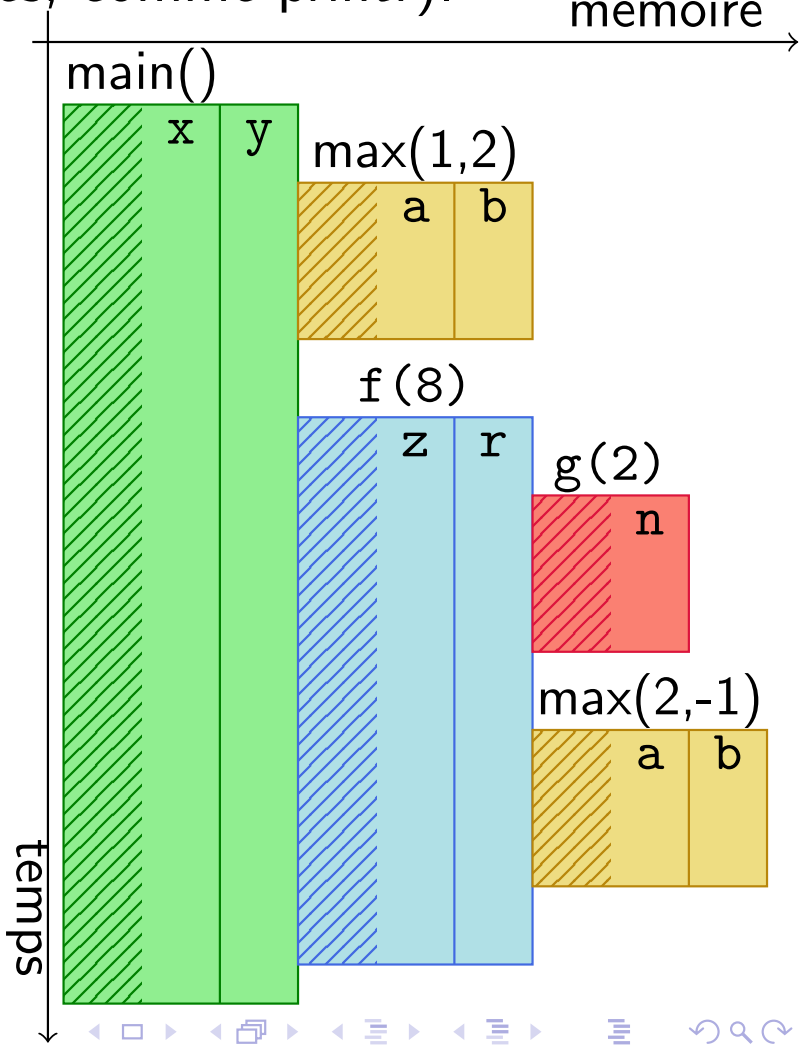
Traces et mémoire

Rappel : nous faisons la trace de chaque appel de chaque fonction que l'on a défini (pas les fonctions externes, comme printf).

La trace d'un programme donne schématiquement ce type de dessin

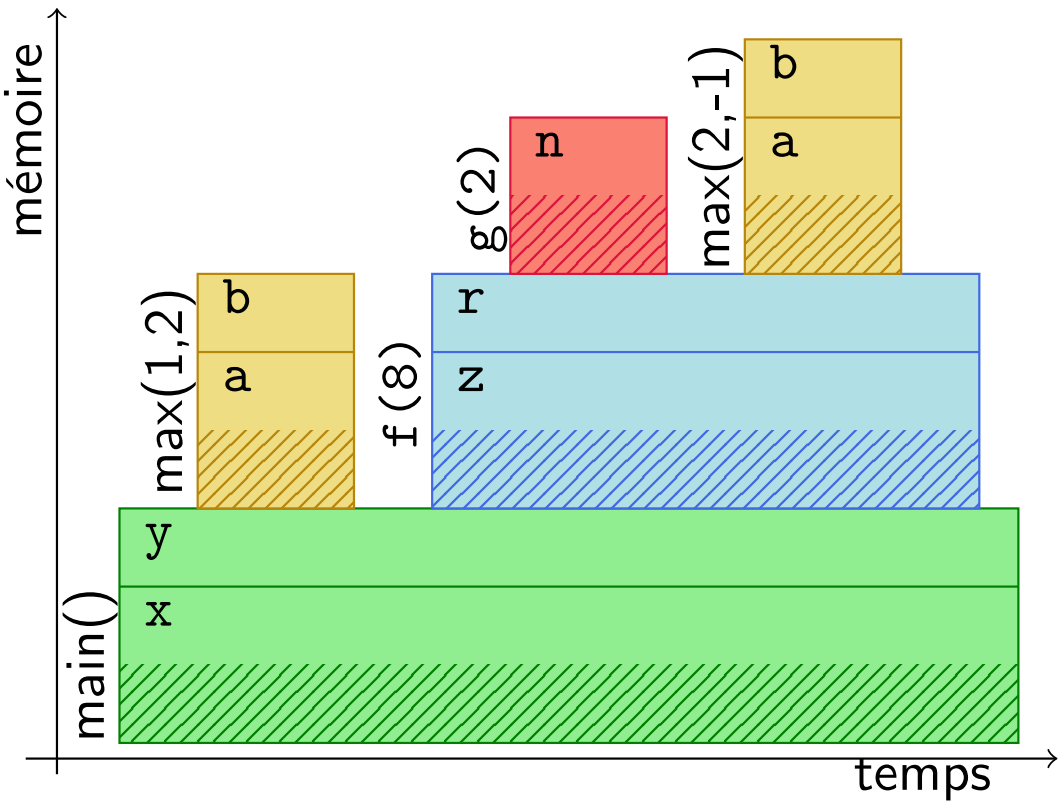
- verticalement, c'est le temps
- et horizontalement, l'occupation mémoire
- un appel de fonction occupe une portion de mémoire, puis la libère.
- la trace représente réellement ce qui arrive dans vos programmes.

Un appel de fonction peut-il modifier la mémoire d'une fonction appelante ?



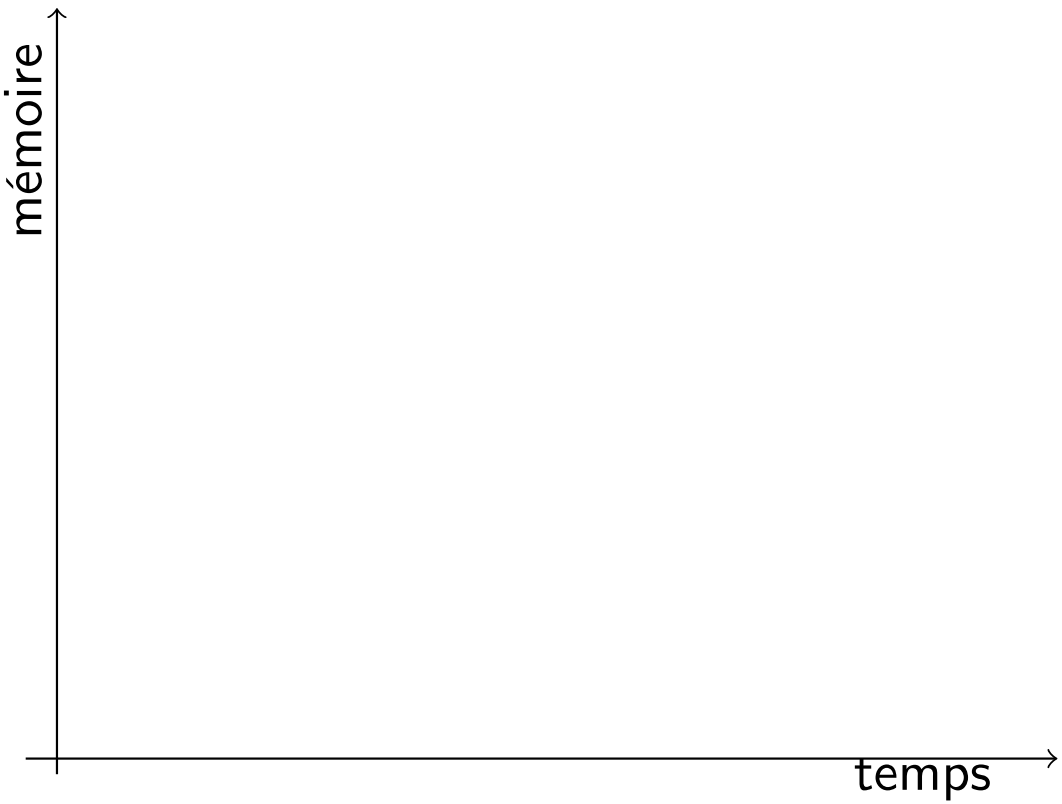
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



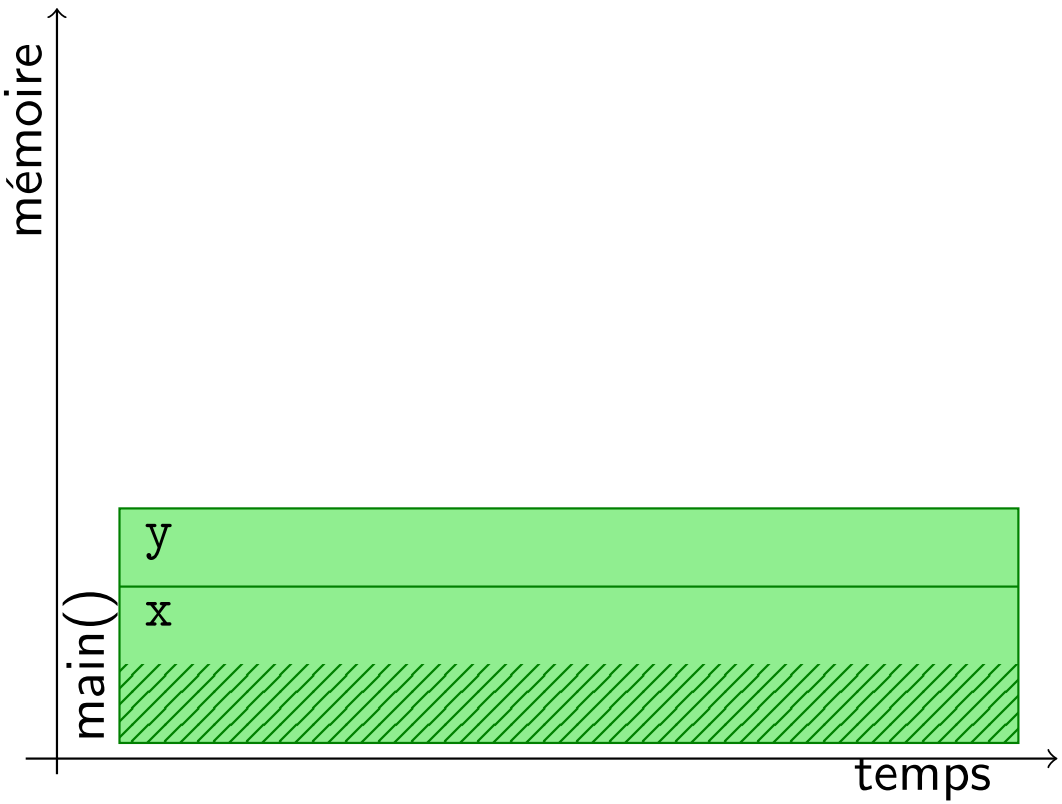
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



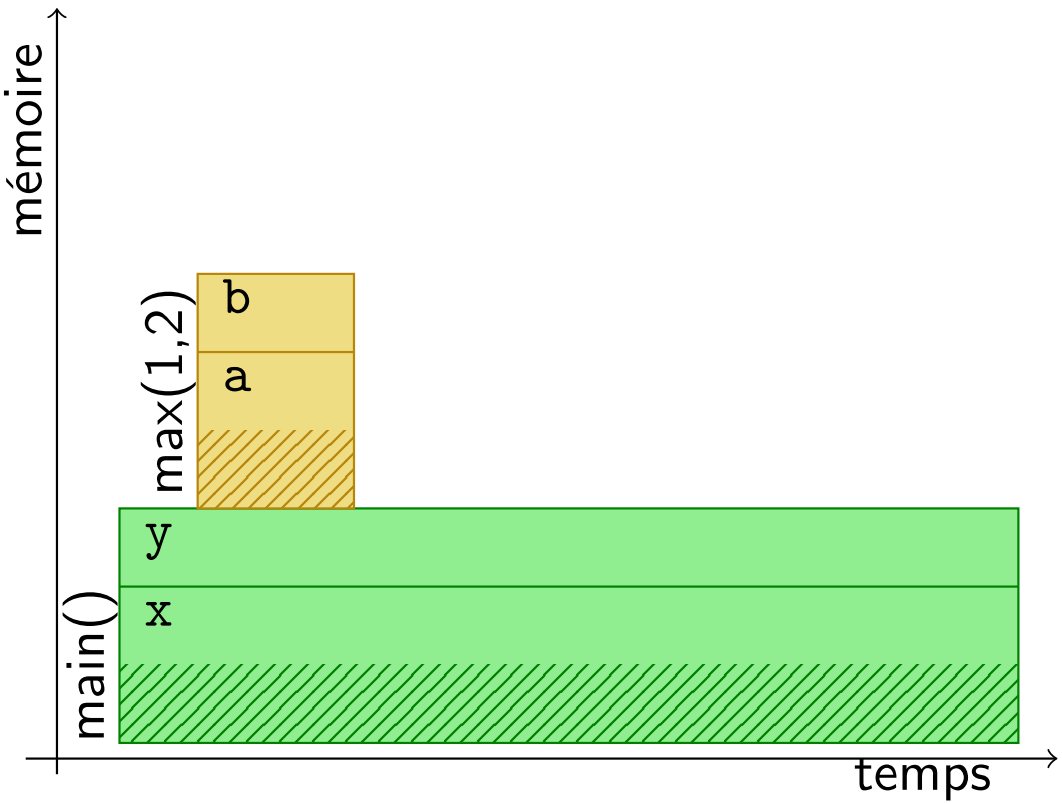
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



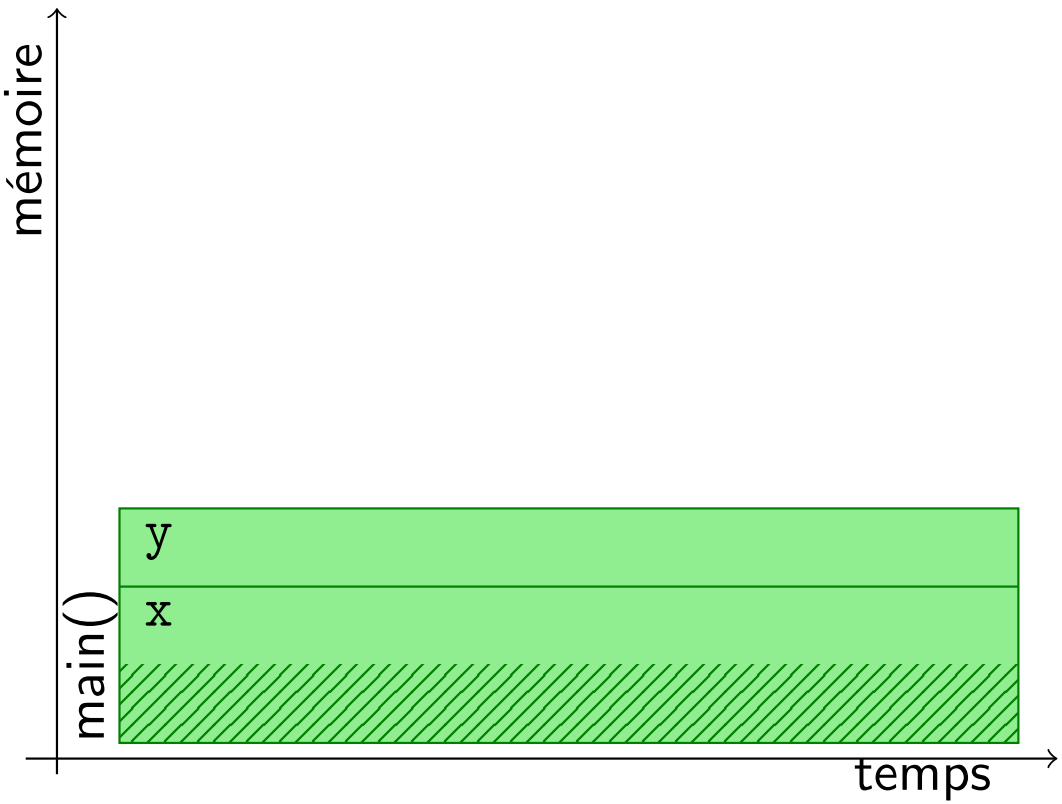
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



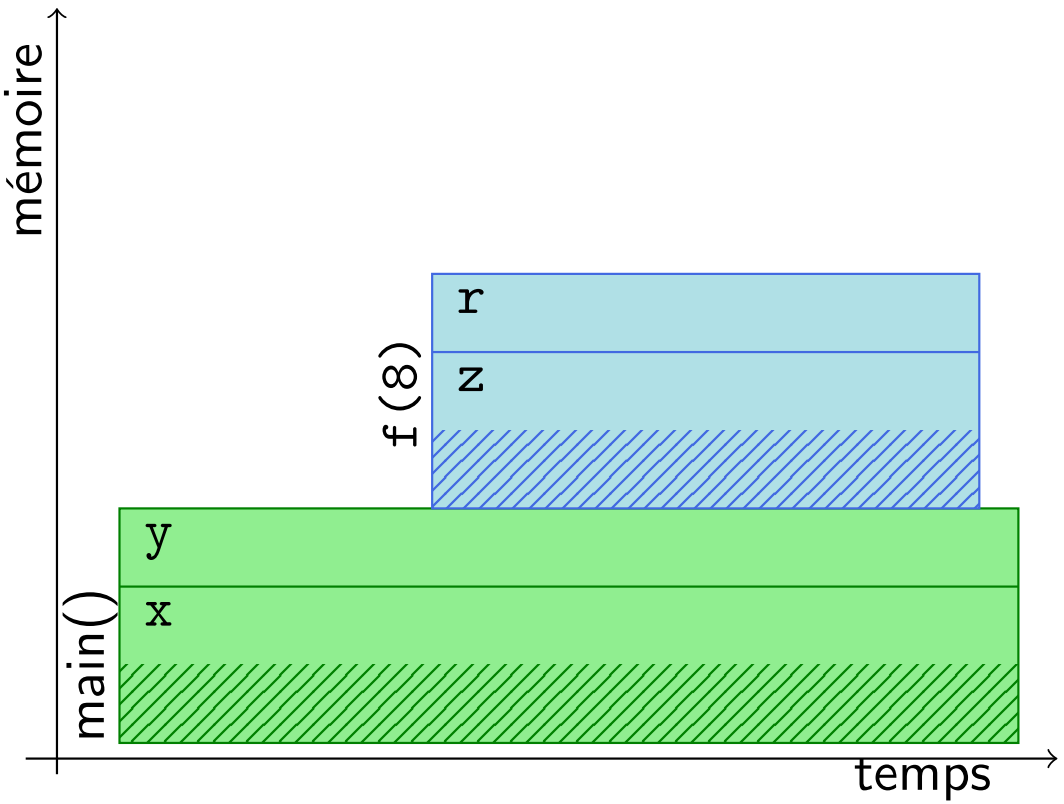
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



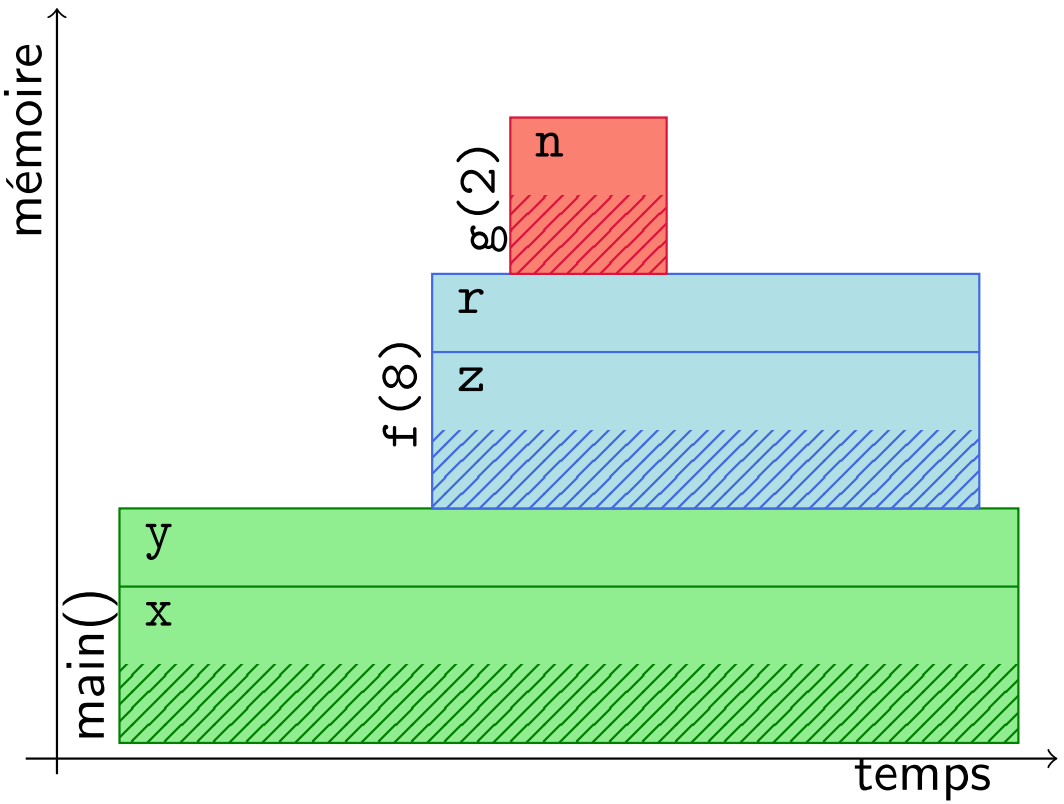
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



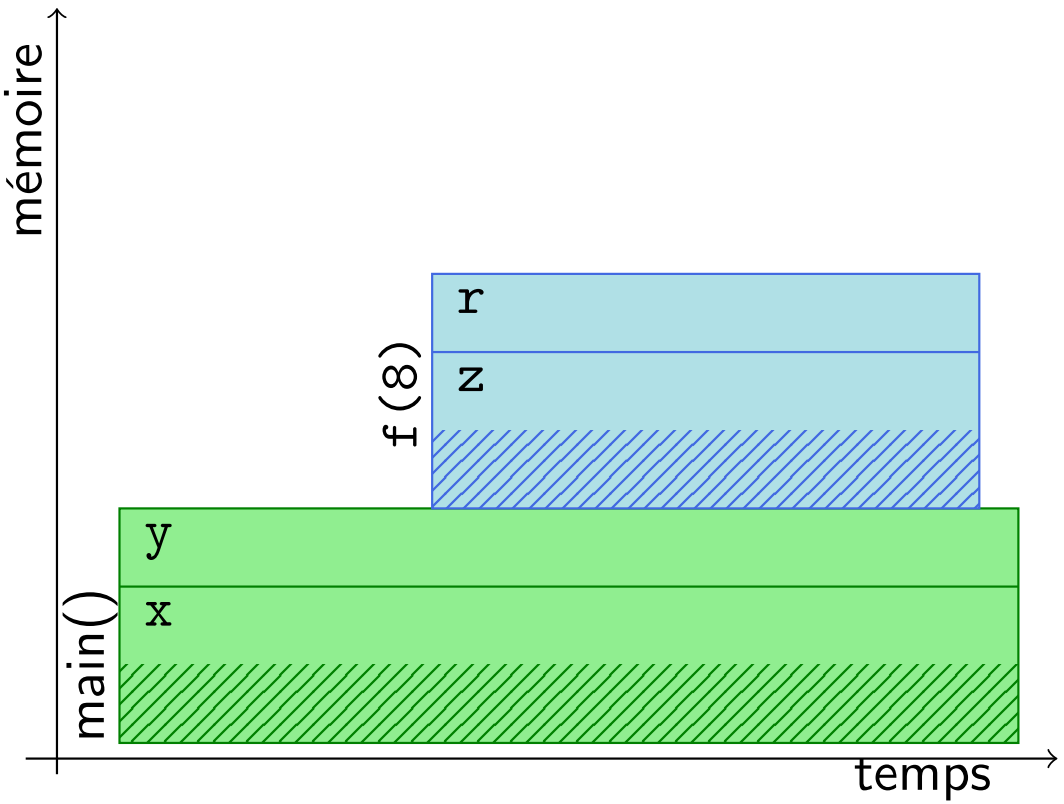
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



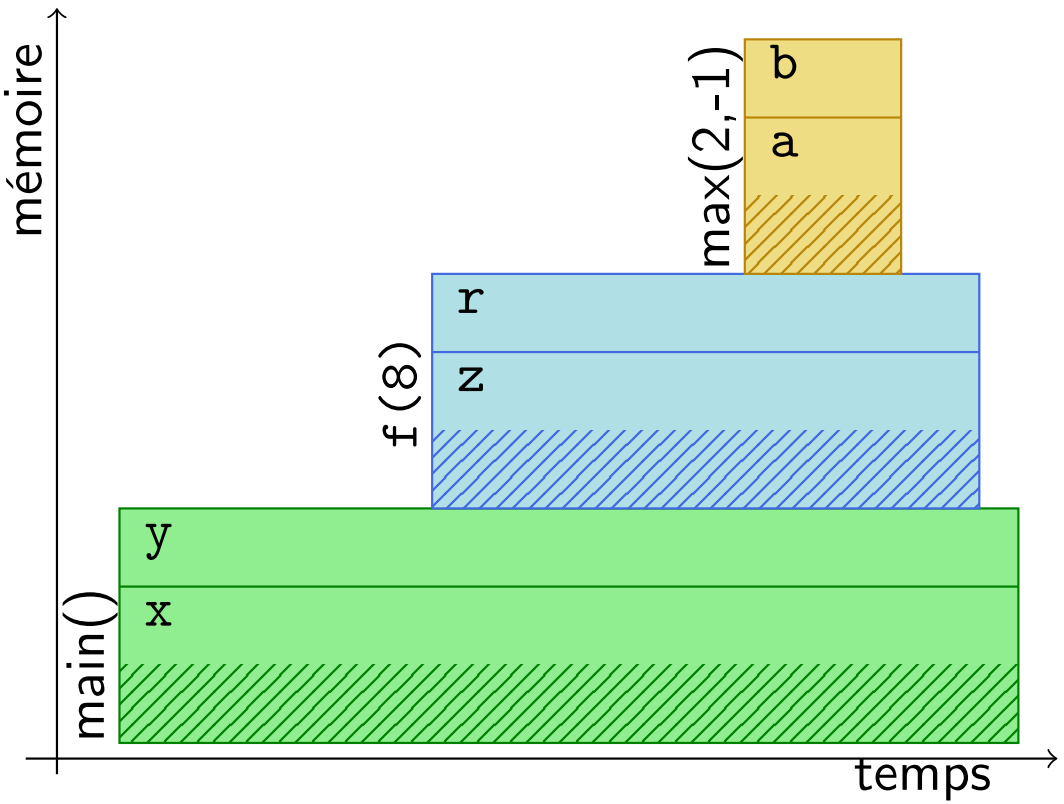
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



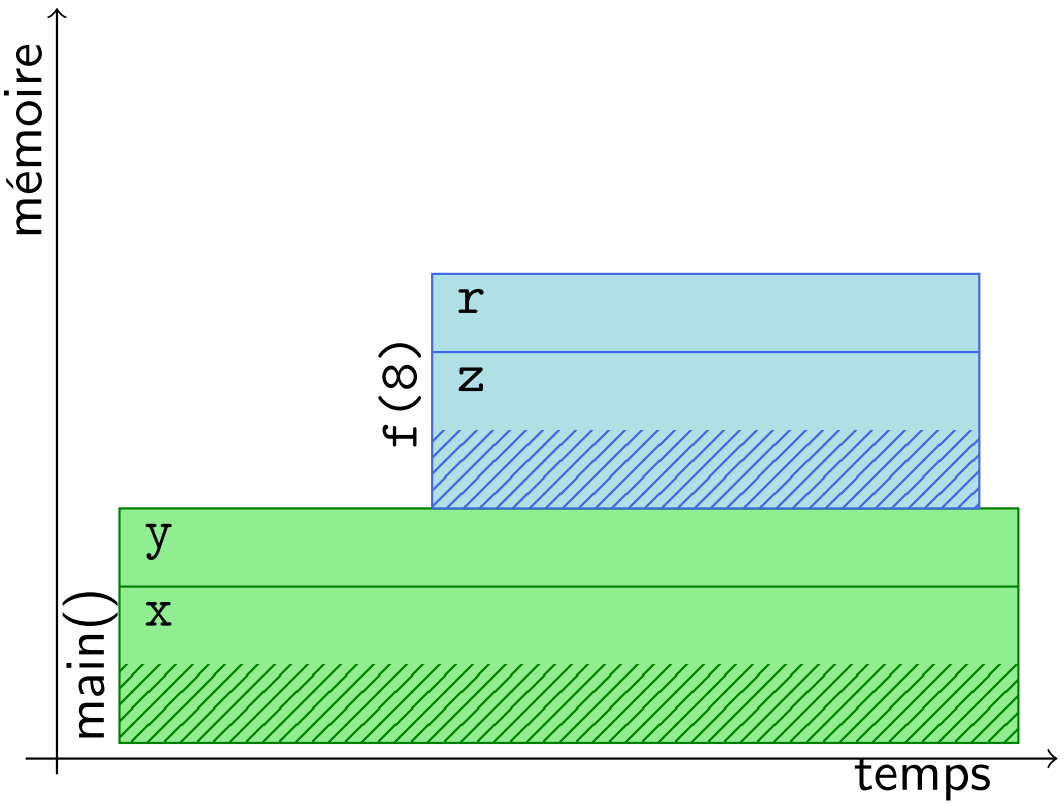
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



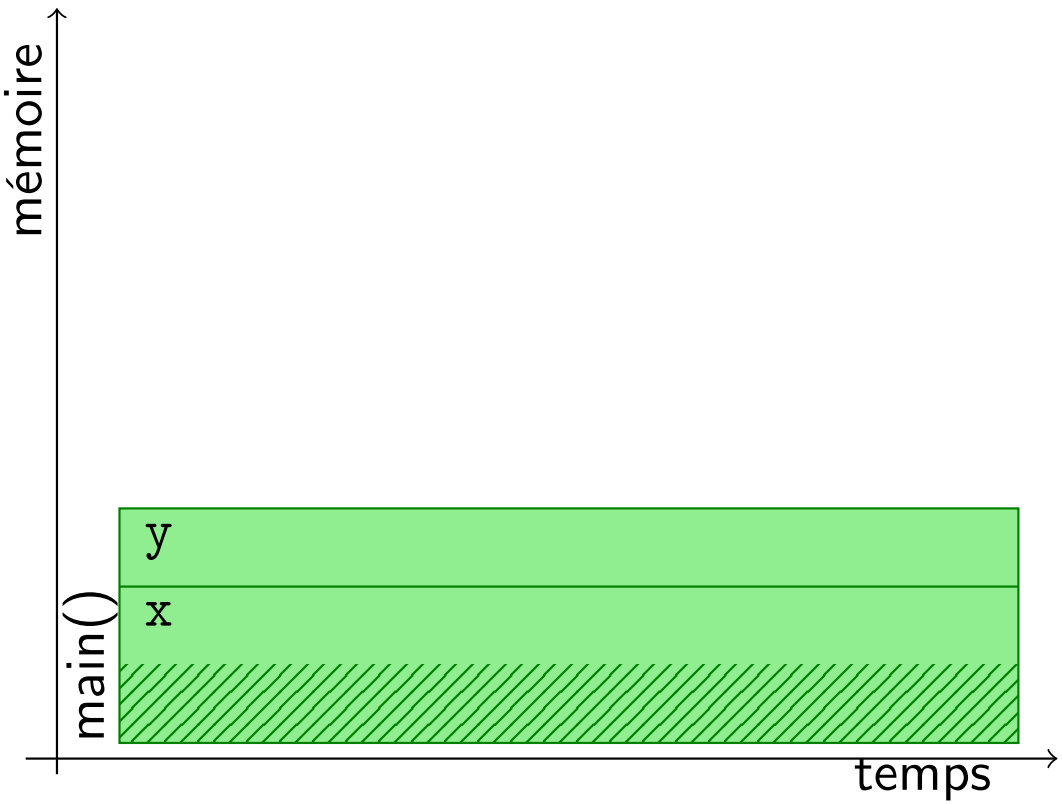
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



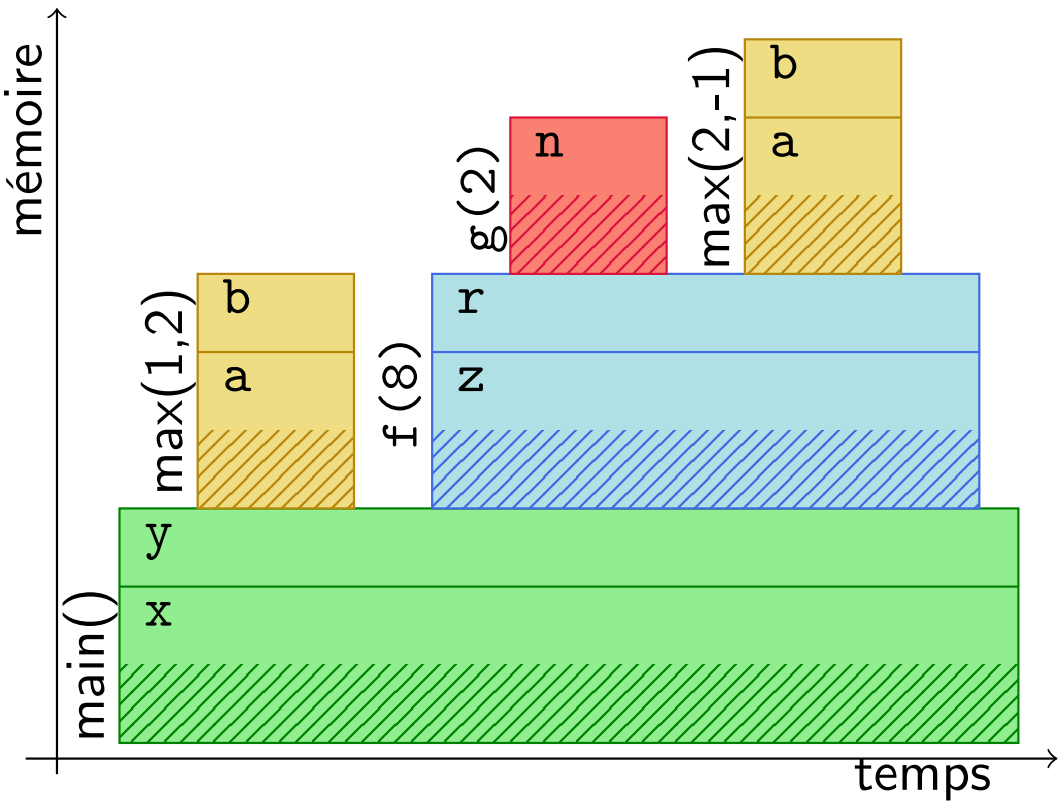
Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



Pile d'appel

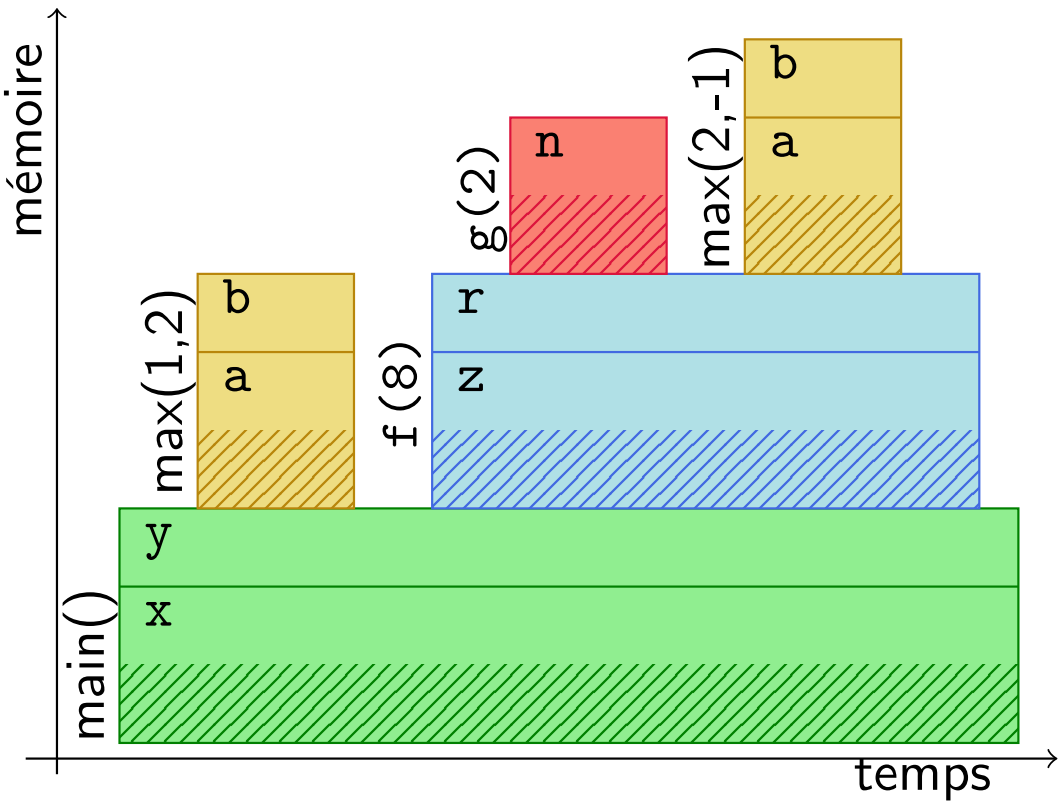
On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*



Pile d'appel

On parle de pile d'appel car les appels de fonctions s'empilent... *comme sur une pile d'assiettes.*

Peut-on avoir deux assiettes identiques dans la pile ? (La même fonction avec des contenus différents)



Fonctions récursives

Définition

Une fonction récursive est une fonction dont la définition fait appel à la fonction *elle-même*.

Fonctions récursives

Définition

Une fonction récursive est une fonction dont la définition fait appel à la fonction *elle-même*.

Il y a une forte analogie avec les maths : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Fonctions récursives

Définition

Une fonction récursive est une fonction dont la définition fait appel à la fonction *elle-même*.

Il y a une forte analogie avec les maths : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Terminaison

Il faut un cas de base qui ne déclenche pas d'appel récursif.

Fonctions récursives

Définition

Une fonction récursive est une fonction dont la définition fait appel à la fonction *elle-même*.

Il y a une forte analogie avec les maths : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Terminaison

Il faut un cas de base qui ne déclenche pas d'appel récursif.

Comme dans :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \begin{cases} n \times f(n-1) \text{ si n} > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Factorielle (1)

```
int factorielle(int n)
{
    int res; /* resultat */
    if (n > 0) /* cas recursif */
    {
        res = n * factorielle(n - 1);
    }
    else /* cas de base */
    {
        res = 1;
    }
    return res;
}
```

Factorielle (2)

Version plus concise :

```
int factorielle(int n)
{
    if (n < 2) /* cas de base */
    {
        return 1;
    }
    return n * factorielle(n - 1);
}
```

Récursion (2). Pour aller plus loin

- Outre les exemples mathématiques directs comme factorielle, de nombreux problèmes sont beaucoup plus facile à résoudre de manière récursive. À au moins un moment du raisonnement, on suppose que l'on dispose déjà de la fonction qui résout le problème et on l'applique à un cas « plus petit ».

Récursion (2). Pour aller plus loin

- Outre les exemples mathématiques directs comme factorielle, de nombreux problèmes sont beaucoup plus facile à résoudre de manière récursive. À au moins un moment du raisonnement, on suppose que l'on dispose déjà de la fonction qui résout le problème et on l'applique à un cas « plus petit ».
- On apprend ici la programmation impérative où un élément central est le changement d'état des cases mémoires (et les effets de bord comme vous le verrez au second semestre). En *programmation fonctionnelle*, l'accent est mis sur les fonctions sans effets de bord, et la récursion occupe le tout premier plan, notamment pour faire ce que l'on a l'habitude de faire avec des boucles en programmation impérative.

Récursion (2). Pour aller plus loin

- Outre les exemples mathématiques directs comme factorielle, de nombreux problèmes sont beaucoup plus facile à résoudre de manière récursive. À au moins un moment du raisonnement, on suppose que l'on dispose déjà de la fonction qui résout le problème et on l'applique à un cas « plus petit ».
- On apprend ici la programmation impérative où un élément central est le changement d'état des cases mémoires (et les effets de bord comme vous le verrez au second semestre). En *programmation fonctionnelle*, l'accent est mis sur les fonctions sans effets de bord, et la récursion occupe le tout premier plan, notamment pour faire ce que l'on a l'habitude de faire avec des boucles en programmation impérative.
- Un appel récursif peut être indirect, c'est à dire effectué dans le code d'une fonction auxilliaire.

Exemples. Affichage à la descente

Avec le code :

```
int factorielle(int n)
{
    printf("%d ", n);
    if (n < 2) /* cas de base */
    {
        return 1;
    }
    return n * factorielle(n - 1);
}
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

Exemples. Affichage à la descente

Avec le code :

```
int factorielle(int n)
{
    printf("%d ", n);
    if (n < 2) /* cas de base */
    {
        return 1;
    }
    return n * factorielle(n - 1);
}
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

```
5 4 3 2 1
```

Exemples. Affichage à la descente

Avec le code :

```
int factorielle(int n)
{
    printf("%d ", n);
    if (n < 2) /* cas de base */
    {
        return 1;
    }
    return n * factorielle(n - 1);
}
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

`5 4 3 2 1`

- Comment obtenir `1 2 3 4 5` ?

Exemples. Affichage à la remontée

Et avec le code :

```
 7  int factorielle(int n)
 8  {
 9      int res = 1;
10
11      if (n > 1) /* cas recursif */
12      {
13          res =  n * factorielle(n - 1);
14      }
15      printf("%d ", n);
16      return res;
17  }
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

Exemples. Affichage à la remontée

Et avec le code :

```
 7  int factorielle(int n)
 8  {
 9      int res = 1;
10
11      if (n > 1) /* cas recursif */
12      {
13          res =  n * factorielle(n - 1);
14      }
15      printf("%d ", n);
16      return res;
17  }
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

`1 2 3 4 5`

- Comment obtenir `5 4 3 2 1 1 2 3 4 5` ?
- Peut-on obtenir : `1 2 3 4 5 5 4 3 2 1` ?

Exemples. Affichage à la remontée

Et avec le code :

```
 7  int factorielle(int n)
 8  {
 9      int res = 1;
10      printf("%d ", n);
11      if (n > 1) /* cas recursif */
12      {
13          res =  n * factorielle(n - 1);
14      }
15      printf("%d ", n);
16      return res;
17  }
```

L'appel `factorielle(5)` aura pour effet de bord d'afficher :

1 2 3 4 5

- Comment obtenir 5 4 3 2 1 1 2 3 4 5 ?
- Peut-on obtenir : 1 2 3 4 5 5 4 3 2 1 ?

Exemple. Double appel

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple. Double appel

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Relation de récurrence donnée par le triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Exemple. Double appel

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Relation de récurrence donnée par le triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Cas de base : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Exemple. Double appel

Coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Relation de récurrence donnée par le triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Cas de base : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Code :

```
int binomial(int n, int p)
{
    if ( (p == 0) || (n == p) ) /* cas de base */
    {
        return 1;
    }
    return binomial(n - 1, p - 1) + binomial(n - 1, p);
}
```

Exemple. Écriture récursive de boucles

Calcul de la moyenne d'une série saisie par l'utilisateur.

Exemple. Écriture récursive de boucles

Calcul de la moyenne d'une série saisie par l'utilisateur.

```
double faire_moyenne()
{
    return faire_moyenne_aux(0, 0);
}

double faire_moyenne_aux(double somme, int n)
{
    int terme = -1;

    printf("Entier positif : ");
    scanf("%d", &terme);
    if (terme < 0) /* cas de base */
    {
        return somme / n; /* moyenne des termes precedents */
    }
    return faire_moyenne_aux(somme + terme, n + 1);
}
```