Introduction à la sémantique des jeux

GDT complexité et sémantique

19 septembre 2005

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.
- La dynamique est externe (interaction). Les termes qui ne différent que par des réductions internes sont identifiés :

$$n + 1 + 2 \text{ et } n + 3$$

.

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.
- La dynamique est externe (interaction). Les termes qui ne diffèrent que par des réductions internes sont identifiés :

$$n + 1 + 2 \text{ et } n + 3$$

$$\lambda ngy.(\lambda fx.(n\, f\, (f\, x))\, g\, (g\, (g\, y))) \text{ et } \lambda ngy.(n\, g\, (g\, (g\, (g\, y)))).$$

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.
- La dynamique est externe (interaction). Les termes qui ne diffèrent que par des réductions internes sont identifiés :

$$n+1+2 \text{ et } n+3$$

$$\lambda ngy.(\lambda fx.(n\, f\, (f\, x))\, g\, (g\, (g\, y))) \text{ et } \lambda ngy.(n\, g\, (g\, (g\, (g\, y)))).$$

- L'interprétation (agent syntaxique $\mapsto$ agent sémantique) n'est, en général, ni surjective, ni injective sur les formes normales.

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.
- La dynamique est externe (interaction). Les termes qui ne diffèrent que par des réductions internes sont identifiés :

$$n + 1 + 2 \text{ et } n + 3$$

$$\lambda ngy.(\lambda fx.(n\, f\, (f\, x))\, g\, (g\, (g\, y))) \text{ et } \lambda ngy.(n\, g\, (g\, (g\, (g\, y)))).$$

- L'interprétation (agent syntaxique $\mapsto$ agent sémantique) n'est, en général, ni surjective, ni injective sur les formes normales.
- Là où les sémantiques « classiques » se contentent du résultat de l'interaction, les jeux rendent compte de son déroulement (dans le temps).

- Un « agent » du Calcul (programme, preuve, λ-terme) est représenté par une structure décrivant *toutes ses interactions possibles* avec d'autres agents.
- La dynamique est externe (interaction). Les termes qui ne diffèrent que par des réductions internes sont identifiés :

$$n + 1 + 2 \text{ et } n + 3$$

$$\lambda ngy.(\lambda fx.(n\, f\, (f\, x))\, g\, (g\, (g\, y))) \text{ et } \lambda ngy.(n\, g\, (g\, (g\, (g\, y)))).$$

- L'interprétation (agent syntaxique $\mapsto$ agent sémantique) n'est, en général, ni surjective, ni injective sur les formes normales.
- Là où les sémantiques « classiques » se contentent du résultat de l'interaction, les jeux rendent compte de son déroulement (dans le temps).
- Plutôt une syntaxe abstraite, sur les formes normales. . .

cadre mathématique

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \rightarrow B, \ldots$
- **Stratégie** (agent) ϕ, ψ

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** $=$ suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ϕ, ψ

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** $=$ suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** $=$ suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** $=$ suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \rightarrow B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*
- **Composition** $\phi : A \rightarrow B$, $\psi : B \multimap / \rightarrow C$

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*
- **Composition** $\phi : A \to B$, $\psi : B \multimap / \to C$

$$\psi \circ \phi = \{s \fatsemi t \mid s \in \phi, t \in \psi, s\restriction B = t\restriction B\} \quad \text{(cas linéaire)}$$

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*
- **Composition** $\phi : A \to B$, $\psi : B \multimap / \to C$

$$\psi \circ \phi = \{s \,;\, t \mid s \in \phi, t \in \psi, s{\upharpoonright}B = t{\upharpoonright}B\} \quad \text{(cas linéaire)}$$

$$\psi \circ \phi = \{\sigma \,;\, t \mid \sigma \in \phi^{\dagger}, t \in \psi, \sigma{\upharpoonright}!B = t{\upharpoonright}!B\}$$

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \to B, \dots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*
- **Composition** $\phi : A \to B$, $\psi : B \multimap / \to C$

$$\psi \circ \phi = \{s \fatsemi t \mid s \in \phi, t \in \psi, s{\upharpoonright}B = t{\upharpoonright}B\} \quad \text{(cas linéaire)}$$

$$\psi \circ \phi = \{\sigma \fatsemi t \mid \sigma \in \phi^\dagger, t \in \psi, \sigma{\upharpoonright}!B = t{\upharpoonright}!B\}$$

$$\phi : A \to B = !A \multimap B \qquad \phi^\dagger : !A \multimap !B$$

cadre mathématique

- **Jeu** (type) $G, A, A \rightarrow B, \ldots$
  - **coup** opposant/joueur $m, m^{\mathrm{O}}, m^{\mathrm{J}}, a, b, c, d$
  - **partie** = suite finie de coups (mot) s, p, q, r, t
- **Stratégie** (agent) ensemble de parties satisfaisant certaines propriétés : ϕ, ψ
  - bonne formation des parties – alternance –;
  - clôture par préfixes ; *(interaction partielle)*
  - si $s \cdot a$ et $s \cdot b$ sont deux parties dans ϕ et si a et b sont des coups joueurs, alors $a = b$. *(déterminisme)*
- **Composition** $\phi : A \rightarrow B$, $\psi : B \multimap / \rightarrow C$

$$\psi \circ \phi = \{s \mathbin{;} t \mid s \in \phi, t \in \psi, s\restriction B = t\restriction B\} \quad \text{(cas linéaire)}$$

$$\psi \circ \phi = \{\sigma \mathbin{;} t \mid \sigma \in \phi^{\dagger}, t \in \psi, \sigma\restriction !B = t\restriction !B\}$$

$$\phi : A \rightarrow B = !A \multimap B \qquad \phi^{\dagger} : !A \multimap !B$$

- **Catégories** : composition associative, identités (*copycat*).

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

- Types de données :

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

- Types de données :
  - jeu **bool** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \{V^{\mathrm{J}}, F^{\mathrm{J}}\}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}, ?^{\mathrm{O}}V^{\mathrm{J}}, ?^{\mathrm{O}}F^{\mathrm{J}}\})$

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

- Types de données :
  - jeu **bool** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \{V^{\mathrm{J}}, F^{\mathrm{J}}\}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}, ?^{\mathrm{O}}V^{\mathrm{J}}, ?^{\mathrm{O}}F^{\mathrm{J}}\})$
  - jeu **nat** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \mathbb{N}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}\} \uplus \{?^{\mathrm{O}}n^{\mathrm{J}} \mid n \in \mathbb{N}\})$

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

- Types de données :
  - jeu **bool** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \{V^{\mathrm{J}}, F^{\mathrm{J}}\}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}, ?^{\mathrm{O}}V^{\mathrm{J}}, ?^{\mathrm{O}}F^{\mathrm{J}}\})$
  - jeu **nat** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \mathbb{N}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}\} \uplus \{?^{\mathrm{O}}n^{\mathrm{J}} \mid n \in \mathbb{N}\})$
- Une stratégie est un ensemble non vide $\phi \subseteq P^{\mathrm{J}}$, clos par préfixes joueurs et déterministe.

Jeux à la Abramsky Jagadeesan Malacaria

- Un jeu A est la donnée de deux alphabets de coups A^{O} et A^{J} – disjoints – et d'un ensemble de parties

$$P \subseteq \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^*}_{P^{\mathrm{J}}} \uplus \underbrace{(A^{\mathrm{O}} \cdot A^{\mathrm{J}})^* \cdot A^{\mathrm{O}}}_{P^{\mathrm{O}}}$$

- Types de données :
  - jeu **bool** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \{V^{\mathrm{J}}, F^{\mathrm{J}}\}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}, ?^{\mathrm{O}}V^{\mathrm{J}}, ?^{\mathrm{O}}F^{\mathrm{J}}\})$
  - jeu **nat** $= (\{?^{\mathrm{O}}\}, \mathbb{N}, \{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}\} \uplus \{?^{\mathrm{O}}n^{\mathrm{J}} \mid n \in \mathbb{N}\})$
- Une stratégie est un ensemble non vide $\phi \subseteq P^{\mathrm{J}}$, clos par préfixes joueurs et déterministe.
  - Il y a trois stratégies dans **bool**, une *partielle* : $\{\varepsilon\}$ et deux totales : $\{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}V^{\mathrm{J}}\}$ et $\{\varepsilon, ?^{\mathrm{O}}F^{\mathrm{J}}\}$.

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

  O : quelle est la valeur de sortie ? $?^{\mathrm{O}}$

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

O : quelle est la valeur de sortie ? $?^{O}$

J : quelle est la valeur d'entrée ? $?^{O}$

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \rightarrow \mathbf{nat}_o$

O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

		$\mathbf{nat}_i$	$\mathbf{nat}_o$
O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

- **Définition de la flèche linéaire** :

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\textbf{nat}_i \rightarrow \textbf{nat}_o$

O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

- **Définition de la flèche linéaire** :

  Coups : $(A \multimap B)^{\mathrm{O}} = A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}$, $(A \multimap B)^{\mathrm{J}} = A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

- **Définition de la flèche linéaire** :

  Coups : $(A \multimap B)^{\mathrm{O}} = A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}$, $(A \multimap B)^{\mathrm{J}} = A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$

  Partie : mot alternant dont les projections sur A et B sont des parties ($s{\upharpoonright}A \in P_A$, $s{\upharpoonright}B \in P_B$).

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \to \mathbf{nat}_o$

		$\mathbf{nat}_i$	$\mathbf{nat}_o$
O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

- **Définition de la flèche linéaire** :

  Coups : $(A \multimap B)^{\mathrm{O}} = A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}$, $(A \multimap B)^{\mathrm{J}} = A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$

  Partie : mot alternant dont les projections sur A et B sont des parties ($s{\restriction}A \in P_A$, $s{\restriction}B \in P_B$).

Conséquence : *switching* joueur.

Flèches (flèche linéaire)

- Partie typique dans la flèche : $\mathbf{nat}_i \rightarrow \mathbf{nat}_o$

O :	quelle est la valeur de sortie ?		$?^{\mathrm{O}}$
J :	quelle est la valeur d'entrée ?	$?^{\mathrm{O}}$	
O :	la valeur d'entrée est 5.	5^{J}	
J :	la valeur de sortie est 6.		6^{J}

- **Définition de la flèche linéaire** :

  Coups : $(A \multimap B)^{\mathrm{O}} = A^{\mathrm{J}} \cup B^{\mathrm{O}}$, $(A \multimap B)^{\mathrm{J}} = A^{\mathrm{O}} \cup B^{\mathrm{J}}$

  Partie : mot alternant dont les projections sur A et B sont des parties ($s{\restriction}A \in P_A$, $s{\restriction}B \in P_B$).

  Conséquence : *switching* joueur.

- Propriété similaire pour le tenseur.

Flèches (composition linéaire)

Dialogue entre s et t $(s\restriction B = t\restriction B)$:

$$A \to B \to C$$

$$\vdots$$

$$c^{\mathrm{O}}$$

$$b^{\mathrm{O}}$$

$$a^{\mathrm{O}}$$

$$\vdots$$

$$a^{\mathrm{J}}$$

$$b^{\mathrm{J}}$$

$$\vdots$$

Flèches (composition linéaire)

Dialogue entre s et t $(s{\restriction}B = t{\restriction}B)$:

$$
\begin{array}{ccccc}
A & \to & {\color{red}B} & \to & C \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & c^{\mathrm{O}} \\
 & & {\color{red}b^{\mathrm{O}}} & & \\
a^{\mathrm{O}} & & & & \\
\vdots & & & & \\
a^{\mathrm{J}} & & & & \\
 & & {\color{red}b^{\mathrm{J}}} & & \\
 & & \vdots & &
\end{array}
$$

Témoin mot w (unique) de A, B, C tel que :
$w{\restriction}A \cup B = s$ et $w{\restriction}B \cup C = t$.

Flèches (composition linéaire)

Dialogue entre s et t ($s\restriction B = t\restriction B$) :

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & \color{red}{B} & \to & C \\ & & & & \vdots \\ & & & & c^{\mathrm{O}} \\ & & \color{red}{b^{\mathrm{O}}} & & \\ a^{\mathrm{O}} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a^{\mathrm{J}} & & & & \\ & & \color{red}{b^{\mathrm{J}}} & & \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Témoin mot w (unique) de A, B, C tel que :
$w\restriction A \cup B = s$ et $w\restriction B \cup C = t$.

Composition $s \fatsemi t = w\restriction A \cup C$. Dialogue + masquage.

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$A \rightarrow A$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$
\begin{array}{lccc}
 & A & \rightarrow & A \\
O: & & & a_1^O
\end{array}
$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$\begin{array}{rccc} & A & \longrightarrow & A \\ \mathrm{O}: & & & a_1^{\mathrm{O}} \\ \mathrm{J}: & a_1^{\mathrm{O}} & & \end{array}$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$
\begin{array}{lccc}
 & A & \rightarrow & A \\
O: & & & a_1^{O} \\
J: & a_1^{O} & & \\
O: & a_2^{J} & &
\end{array}
$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$
\begin{array}{lcc}
 & A & \rightarrow \; A \\
\mathrm{O}: & & a_1^{\mathrm{O}} \\
\mathrm{J}: & a_1^{\mathrm{O}} & \\
\mathrm{O}: & a_2^{\mathrm{J}} & \\
\mathrm{J}: & & a_2^{\mathrm{J}}
\end{array}
$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$
\begin{array}{lccc}
 & A & \rightarrow & A \\
\mathrm{O}: & & & a_1^{\mathrm{O}} \\
\mathrm{J}: & a_1^{\mathrm{O}} & & \\
\mathrm{O}: & a_2^{\mathrm{J}} & & \\
\mathrm{J}: & & & a_2^{\mathrm{J}} \\
\mathrm{O}: & & & a_3^{\mathrm{O}} \\
 & & \vdots &
\end{array}
$$

Flèches (Identité)

- *Copycat*

$$
\begin{array}{rlcc}
 & & A \rightarrow & A \\
\mathrm{O} : & & & a_1^{\mathrm{O}} \\
\mathrm{J} : & a_1^{\mathrm{O}} & & \\
\mathrm{O} : & a_2^{\mathrm{J}} & & \\
\mathrm{J} : & & & a_2^{\mathrm{J}} \\
\mathrm{O} : & & & a_3^{\mathrm{O}} \\
 & & \vdots &
\end{array}
$$

- (Populaire) Karpov vs Copycat vs Kasparov

Goûteur de caractère strict (Catch)

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

		$?^{\mathrm{O}}$	(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$		(J)
	b_o^{J}		(O)
		F^{J}	(J)
		$?^{\mathrm{O}}$	(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$		(J)
$?_i^{\mathrm{O}}$			(O)
		V^{J}	(J)

Goûteur d'identité

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

		$?^{\mathrm{O}}$	(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$		(J)
$?_i^{\mathrm{O}}$			(O)
V_i^{J}			(J)
	V_o^{J}		(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$		(J)
$?_i^{\mathrm{O}}$			(O)
F_i^{J}			(J)
	F_o^{J}		(O)
		V^{J}	(J)

Goûteur d'identité

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

$$\begin{array}{cccr}
 & & ?^{\mathrm{O}} & (\mathrm{O}) \\
 & ?_o^{\mathrm{O}} & & (\mathrm{J}) \\
?_i^{\mathrm{O}} & & & (\mathrm{O}) \\
V_i^{\mathrm{J}} & & & (\mathrm{J}) \\
 & V_o^{\mathrm{J}} & & (\mathrm{O}) \\
 & \color{red}{?_o^{\mathrm{O}}} & & (\mathrm{J}) \\
\color{red}{?_i^{\mathrm{O}}} & & & (\mathrm{O}) \\
\color{red}{F_i^{\mathrm{J}}} & & & (\mathrm{J}) \\
 & \color{red}{F_o^{\mathrm{J}}} & & (\mathrm{O}) \\
 & & V^{\mathrm{J}} & (\mathrm{J})
\end{array}$$

- Appels multiples

Goûteur d'identité

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

		$?^{\mathrm{O}}$	(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$		(J)
$?_i^{\mathrm{O}}$			(O)
	$\color{red}{?_o^{\mathrm{O}}}$		(J)
$\color{red}{?_i^{\mathrm{O}}}$			(O)
V_i^{J}			(J)
	V_o^{J}		(O)
$\color{red}{F_i^{\mathrm{J}}}$			(J)
	$\color{red}{F_o^{\mathrm{J}}}$		(O)
		V^{J}	(J)

- Appels multiples
    - entrelacés,

Goûteur d'identité

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

$$\begin{array}{cccr}
 & & ?^{\mathrm{O}} & (\mathrm{O}) \\
 & ?_o^{\mathrm{O}} & & (\mathrm{J}) \\
?_i^{\mathrm{O}} & & & (\mathrm{O}) \\
V_i^{\mathrm{J}} & & & (\mathrm{J}) \\
 & V_o^{\mathrm{J}} & & (\mathrm{O}) \\
\color{red}{F_i^{\mathrm{J}}} & & & (\mathrm{J}) \\
 & \color{red}{F_o^{\mathrm{J}}} & & (\mathrm{O}) \\
 & & V^{\mathrm{J}} & (\mathrm{J})
\end{array}$$

- Appels multiples
  - entrelacés,
  - avec partage / sans répétition

Goûteur d'identité

$$(\mathbf{bool}_i \to \mathbf{bool}_o) \to \mathbf{bool}$$

		$?^{\mathrm{O}}$		(O)
	$?_o^{\mathrm{O}}$			(J)
$?_i^{\mathrm{O}}$				(O)
V_i^{J}				(J)
	V_o^{J}			(O)
F_i^{J}				(J)
	F_o^{J}			(O)
		V^{J}		(J)

- Appels multiples
  - entrelacés,
  - avec partage / sans répétition
  - indices de copie, rappel du préfixe ($?_o?_iF_iF_o$)

Jeux Hyland-Ong

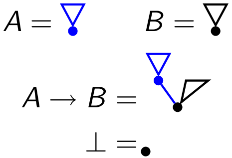
- Jeu = Arène = forêt (enracinée). $A = (|A|, \vdash)$.

Jeux Hyland-Ong

- Jeu = Arène = forêt (enracinée). $A = (|A|, \vdash)$.
- Alternance de la polarité O/J selon la hauteur.

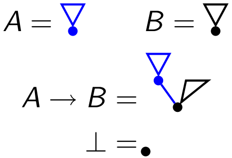
Jeux Hyland-Ong

- Jeu = Arène = forêt (enracinée). $A = (|A|, \vdash)$.
- Alternance de la polarité O/J selon la hauteur.
- Pour les types simples : arènes = arbres finis.



Jeux Hyland-Ong

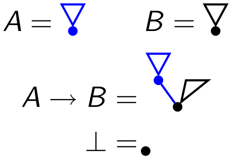
- Jeu = Arène = forêt (enracinée). $A = (|A|, \vdash)$.
- Alternance de la polarité O/J selon la hauteur.
- Pour les types simples : arènes = arbres finis.



- Coup = (occurence d')un élément de l'arène + un pointeur. Difficile à définir hors les parties !

Jeux Hyland-Ong

- Jeu = Arène = forêt (enracinée). $A = (|A|, \vdash)$.
- Alternance de la polarité O/J selon la hauteur.
- Pour les types simples : arènes = arbres finis.



- Coup = (occurence d')un élément de l'arène + un pointeur. Difficile à définir hors les parties !
- Partie :

$$a_1^{\mathrm{O}} \quad a_2^{\mathrm{J}} \quad a_1^{\mathrm{O}} \quad a_4^{\mathrm{J}} \quad a_5^{\mathrm{O}} \quad a_6^{\mathrm{J}} \quad a_7^{\mathrm{O}} \quad a_8^{\mathrm{J}}$$

Stratégies

- Composition . . . facile ! (Mais attention à l'alternance)

Stratégies

- Composition . . . facile ! (Mais attention à l'alternance)
- Stratégie filaire
  - Chaque coup joueur dépend uniquement du fil courant et son pointeur est dans le fil courant.
  - En particulier, saturée par ré-entrelacement OJ.

Stratégies

- Composition . . . facile ! (Mais attention à l'alternance)
- Stratégie filaire
  - Chaque coup joueur dépend uniquement du fil courant et son pointeur est dans le fil courant.
  - En particulier, saturée par ré-entrelacement OJ.
- Stratégie innocente (implique filaire)
  - Chaque coup joueur ne dépend que de la vue courante et son pointeur est dans la vue courante.

Stratégies

- Composition . . . facile ! (Mais attention à l'alternance)
- Stratégie filaire
  - Chaque coup joueur dépend uniquement du fil courant et son pointeur est dans le fil courant.
  - En particulier, saturée par ré-entrelacement OJ.
- Stratégie innocente (implique filaire)
  - Chaque coup joueur ne dépend que de la vue courante et son pointeur est dans la vue courante.
- Bien parenthésée
  - Une réponse pointe toujours sur la dernière question pendante.
  - Factorisation : $\phi = \mathbf{catch} \mathbin{;} \psi$

Stratégies

- Composition . . . facile ! (Mais attention à l'alternance)
- Stratégie filaire
  - Chaque coup joueur dépend uniquement du fil courant et son pointeur est dans le fil courant.
  - En particulier, saturée par ré-entrelacement OJ.
- Stratégie innocente (implique filaire)
  - Chaque coup joueur ne dépend que de la vue courante et son pointeur est dans la vue courante.
- Bien parenthésée
  - Une réponse pointe toujours sur la dernière question pendante.
  - Factorisation : $\phi = \mathbf{catch} \mathbin{;} \psi$
- Innocence + bon parenthésage donne une interprétation surjective du lambda-calcul