

Éléments d'informatique – Cours 8. Indécidabilité de l'arrêt

Pierre Boudes

27 novembre 2009



This work is licensed under the *Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 License*.

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
	⋮	⋮	⋮	⋮

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
	⋮	⋮	⋮	⋮

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n			

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n	0		

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n	0	1	

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n	0	1	0

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...	n	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n	0	1	0	...	?	...

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme $f(p, q)$ qui renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée q et **renvoie 0 sinon**.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

Est-ce que $g(n)$ s'arrête? Que vaut $f(n, n)$?

L'indécidabilité de l'arrêt

- ▶ On peut énumérer, par les entiers, tous les programmes.
- ▶ Un programme prend un entier en entrée et s'arrête (1) ou boucle éternellement (0).

Donnée :	0	1	2	...	n	...
Programme 0	1	1	1
Programme 1	1	0	0
Programme 2	0	0	1
...
Programme n	0	1	0	...	?	...

Contradiction

- ▶ **On suppose** qu'il existe un programme f qui prend en entrée un entier p et renvoie 1 si le programme n° p s'arrête sur la donnée p , et renvoie 0 sinon.
- ▶ On construit un programme g qui prend en entrée un entier p et s'arrête si $f(p, p)$ vaut 0 ou boucle éternellement sinon. Le programme g a lui même un numéro, n .

Est-ce que $g(n)$ s'arrête? Que vaut $f(n, n)$?