Hypercohérences et Jeux

Thèse de doctorat

Pierre BOUDES

Université de la Méditerranée

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^{e} : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^{e} : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^{e} : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.
- La réduction : dynamique du Calcul

$$(3+2)\times 2 = 5 \times 2 = 10.$$

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^{e} : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.
- La réduction : dynamique du Calcul

$$(3 + 2) \times 2 = 5 \times 2 = 10.$$

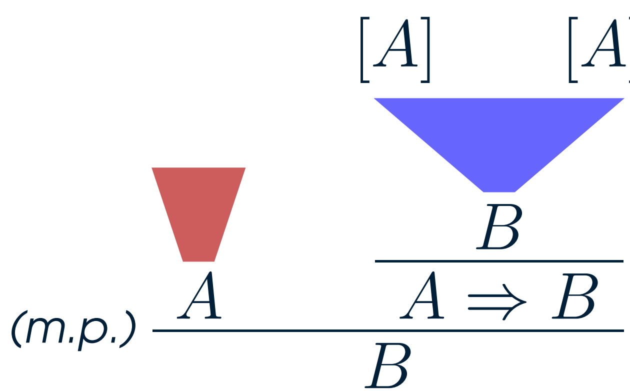
- La logique représente le Calcul.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^e : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.
- La réduction : dynamique du Calcul

$$(3+2) \times 2 = 5 \times 2 = 10.$$

- La logique représente le Calcul.

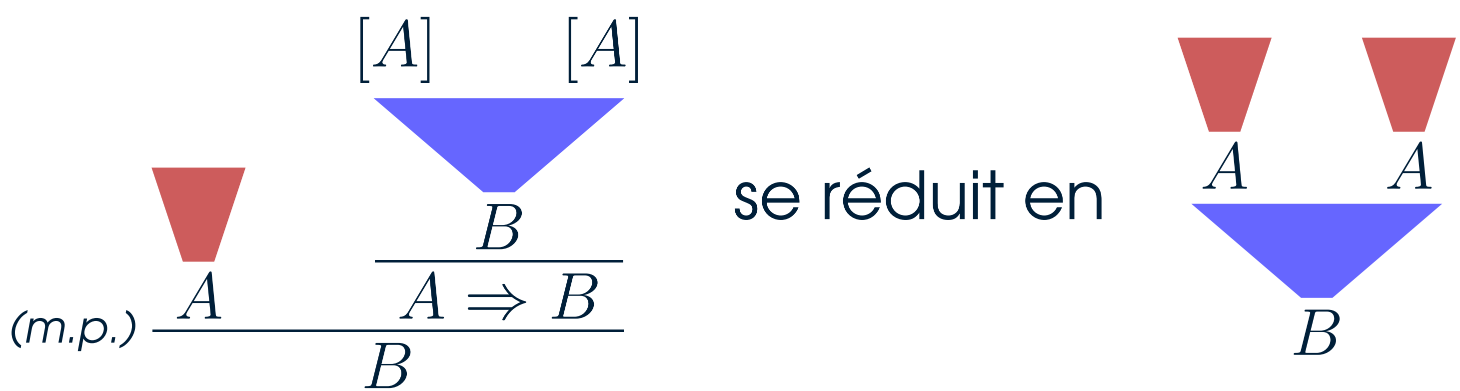


Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^{e} : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.
- La réduction : dynamique du Calcul

$$(3+2)\times 2 = 5 \times 2 = 10.$$

- La logique représente le Calcul.

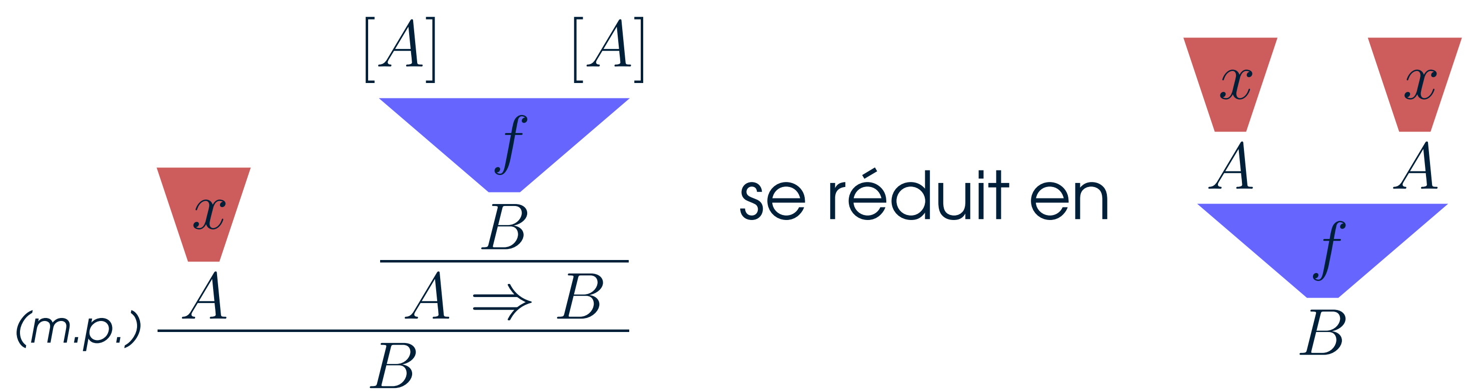


Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

- XX^e : mathématisation du Calcul, étude du calculable, développement de l'informatique.
- Déterminisme, séquentialité et terminaison.
- La réduction : dynamique du Calcul

$$(3+2)\times 2 = 5\times 2 = 10.$$

- La logique représente le Calcul.



- Le point de vue extensionnel.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

Voilà pour ce qui est de représenter le Calcul. . .

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

Voilà pour ce qui est de représenter le Calcul...

Mais comment en étudie-t-on les propriétés ?

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

Voilà pour ce qui est de représenter le Calcul. . .
Mais comment en étudie-t-on les propriétés ?

Réponse : En utilisant la *Sémantique* !

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

La sémantique dénotationnelle.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

La sémantique dénotationnelle.

- Les expressions $(3+2)\times 2$ et 10 dénotent le même entier.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

La sémantique dénotationnelle.

- Les expressions $(3+2)\times 2$ et 10 dénotent le même entier.
- Interpréter le Calcul par des objets invariants par réduction.

Étudier les propriétés mathématiques du Calcul

La sémantique dénotationnelle.

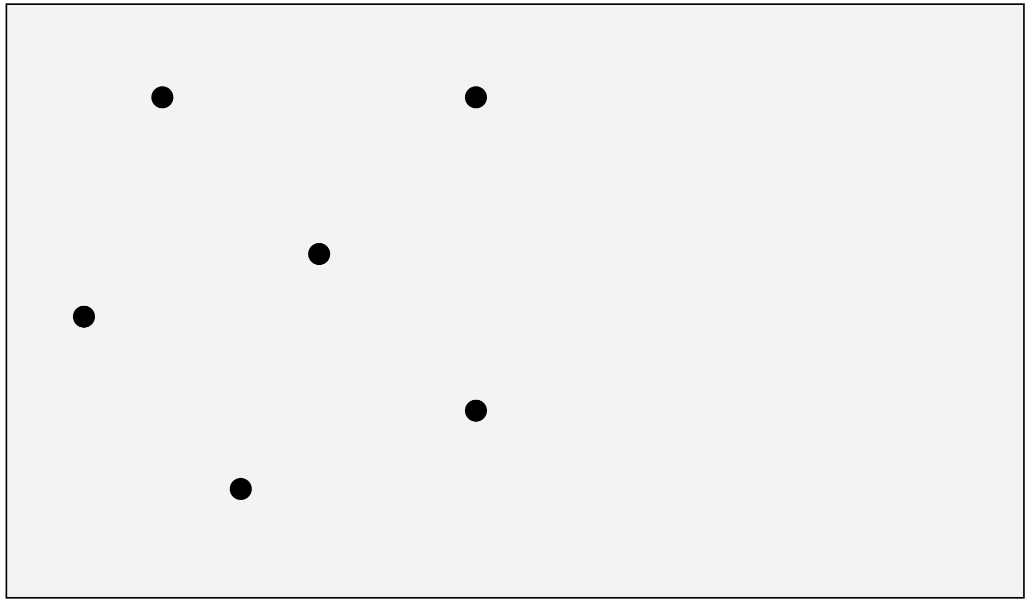
- Les expressions $(3+2)\times 2$ et 10 dénotent le même entier.
- Interpréter le Calcul par des objets invariants par réduction.
- Prendre du recul par rapport à la syntaxe (quitte à lui être infidèle).

Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.

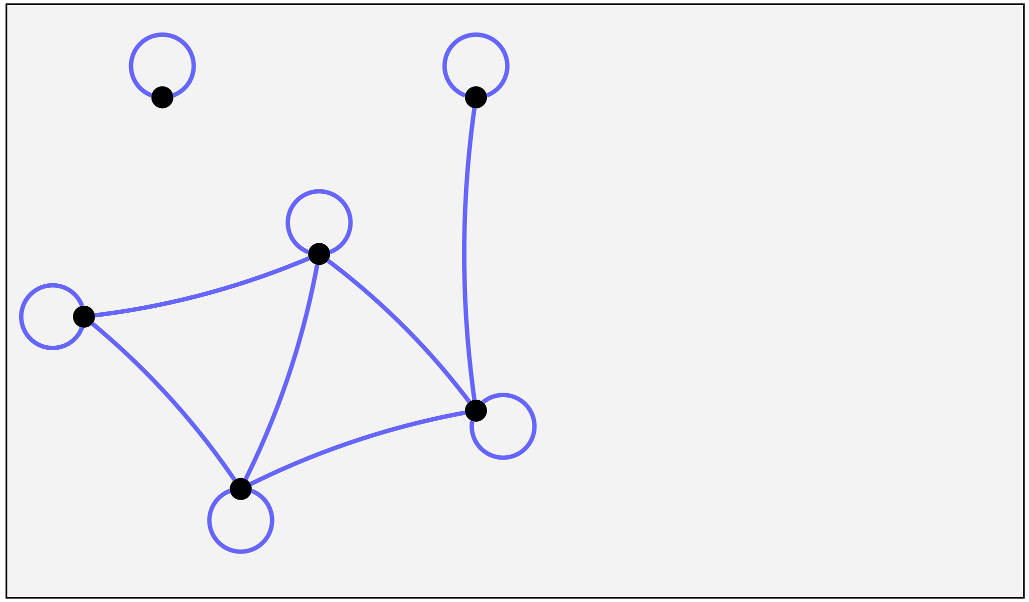
Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



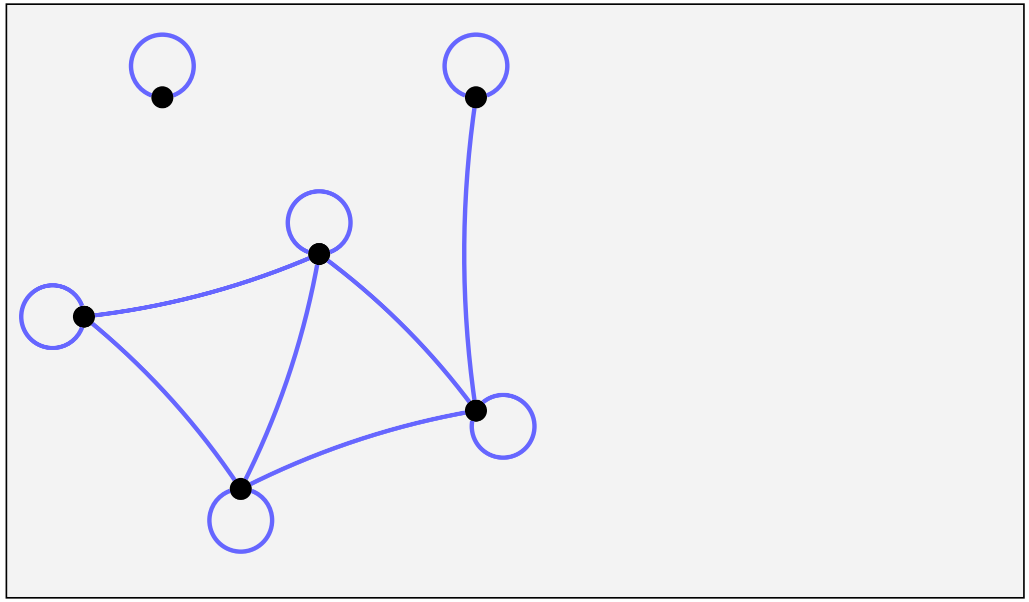
Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



Les espaces cohérents

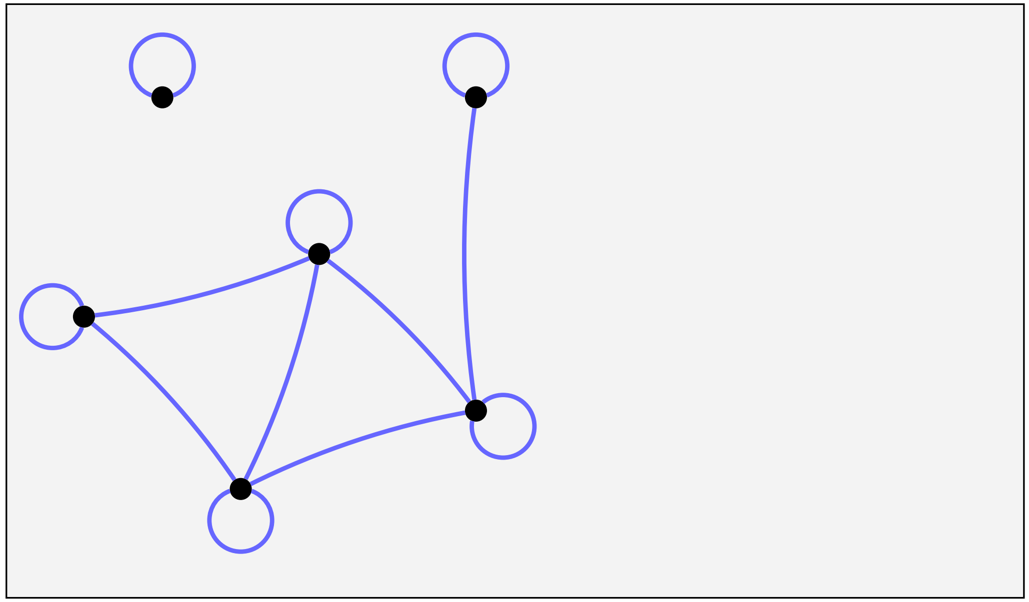
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.

Les espaces cohérents

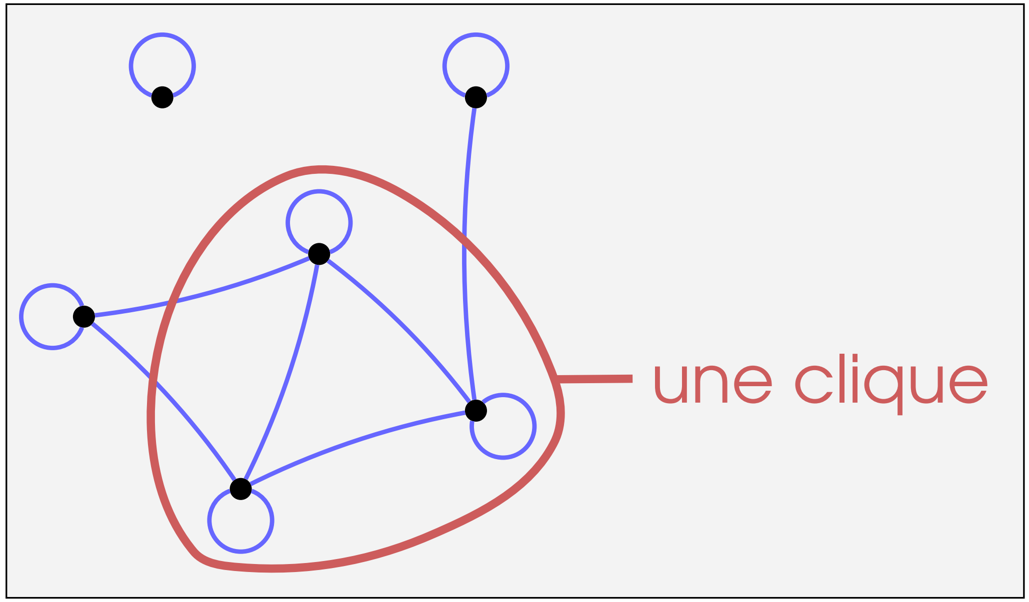
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.

Les espaces cohérents

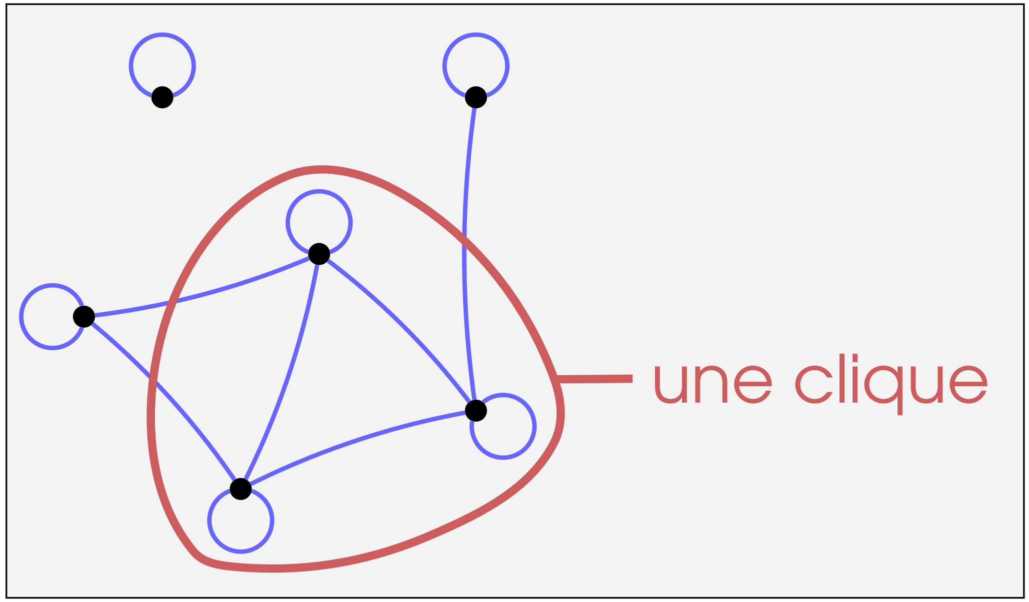
- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.

Les espaces cohérents

- Un espace cohérent E est un graphe.



- Une formule est interprétée par un espace cohérent.
- Une preuve est interprétée par une clique.
- Décomposition linéaire de l'implication :

$$E \Rightarrow F = !E \multimap F.$$

La logique linéaire

La logique linéaire

additifs

$\_ \oplus \_$

plus

$\_ \& \_$

avec

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs
$\_ \oplus \_$	$\_ \otimes \_$
plus	*tenseur*
$\_ \,\&\, \_$	$\_ \parr \_$
avec	*par*

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs	exponentielles
$\_ \oplus \_$	$\_ \otimes \_$	$!\_$
plus	*tenseur*	*bien sûr*
$\_ \mathbin{\&} \_$	$\_ \parr \_$	$?\_$
avec	*par*	*pourquoi pas*

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs	exponentielles	négation linéaire
$\_ \oplus \_$	$\_ \otimes \_$	$!\_$	$\_^{\perp}$
plus	*tenseur*	*bien sûr*	*orthogonal*
$\_ \,\&\, \_$	$\_ \parr \_$	$?\_$	
avec	*par*	*pourquoi pas*	

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs	exponentielles	négation linéaire
$\_ \oplus \_$	$\_ \otimes \_$	$!\_$	$\_^{\perp}$
plus	*tenseur*	*bien sûr*	*orthogonal*
$\_ \& \_$	$\_ \parr \_$	$?\_$	
avec	*par*	*pourquoi pas*	

- *l'implication linéaire :* $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$.

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs	exponentielles	négation linéaire
$\_ \oplus \_$	$\_ \otimes \_$	$!\_$	$\_^{\perp}$
plus	*tenseur*	*bien sûr*	*orthogonal*
$\_ \& \_$	$\_ \parr \_$	$?\_$	
avec	*par*	*pourquoi pas*	

- *l'implication linéaire :* $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$.
- Si le chef est uniforme,

$$!(\text{glace} \oplus \text{tarte}) \overset{\text{(presque)}}{=} !(\text{glace}) \oplus !(\text{tarte}).$$

La logique linéaire

additifs	multiplicatifs	exponentielles	
$P \oplus P$	$P \otimes P$	$!N$	$= P$
plus	*tenseur*	*bien sûr*	$\_^{\perp}$
$N \& N$	$N \parr N$	$?P$	$= N$
avec	*par*	*pourquoi pas*	

- *l'implication linéaire :* $A \multimap B = A^{\perp} \parr B$.
- Si le chef est uniforme,

$$!(\text{glace} \oplus \text{tarte}) \overset{\text{(presque)}}{=} !(\text{glace}) \oplus !(\text{tarte}).$$

- Version polarisée.

Problématique

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.
- Les sémantiques statiques, sans temps explicite.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.
- Les sémantiques statiques, sans temps explicite.
  - Exemple : les espaces cohérents.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.
- Les sémantiques statiques, sans temps explicite.
  - Exemple : les espaces cohérents.
  - Présentation algébrique.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.
- Les sémantiques statiques, sans temps explicite.
  - Exemple : les espaces cohérents.
  - Présentation algébrique.
  - Extensionnalité.

Problématique

Deux grandes familles de sémantiques :

- Les sémantiques dynamiques, représentation explicite du temps.
  - Exemple : les Jeux.
  - Souvent très proches de la syntaxe.
  - Bonne représentation de la séquentialité.
  - Perte du point de vue extensionnel.
- Les sémantiques statiques, sans temps explicite.
  - Exemple : les espaces cohérents.
  - Présentation algébrique.
  - Extensionnalité.

Un résultat étonnant (Ehrhard) :

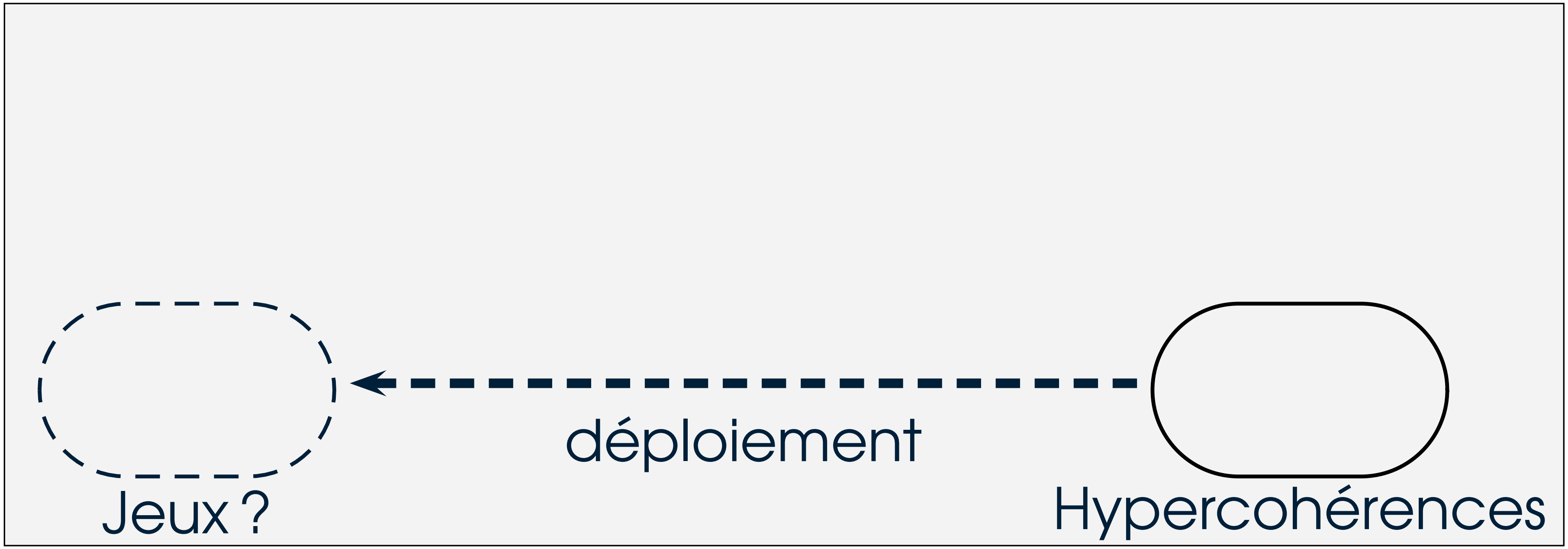
les hypercohérences forment le collapse extensionnel des algorithmes séquentiels.

Contenu de la thèse

Contenu de la thèse

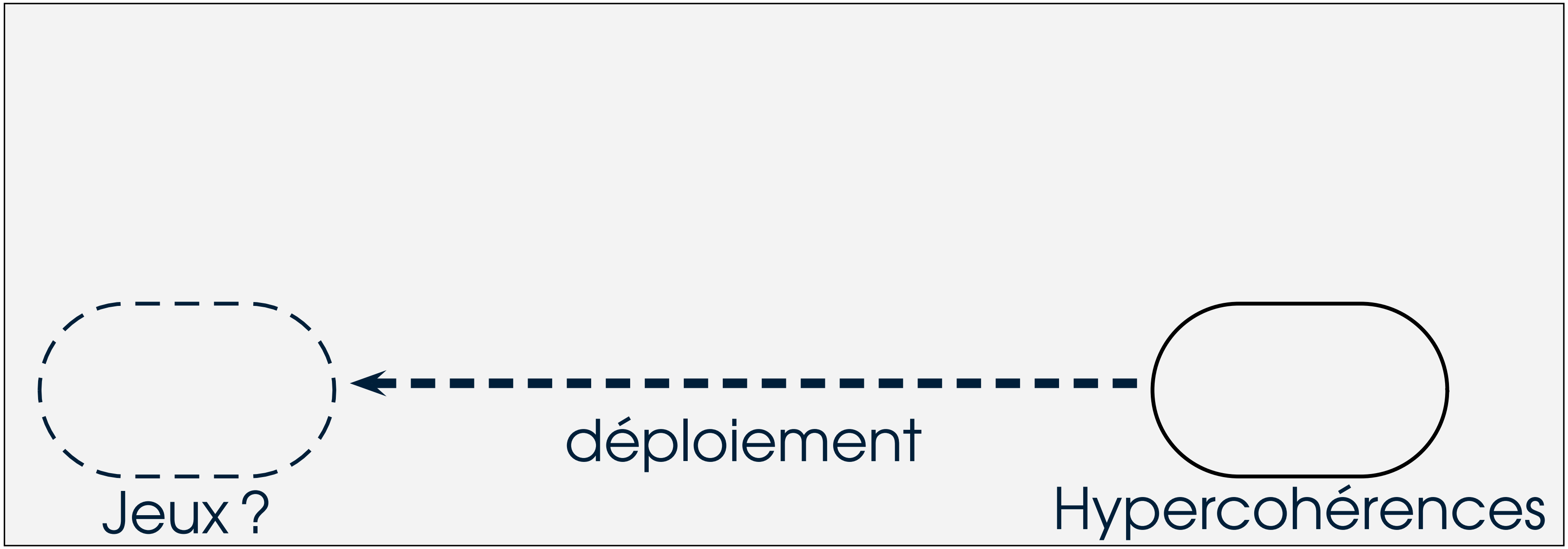
- Déploiement d'hypercohérences

Contenu de la thèse



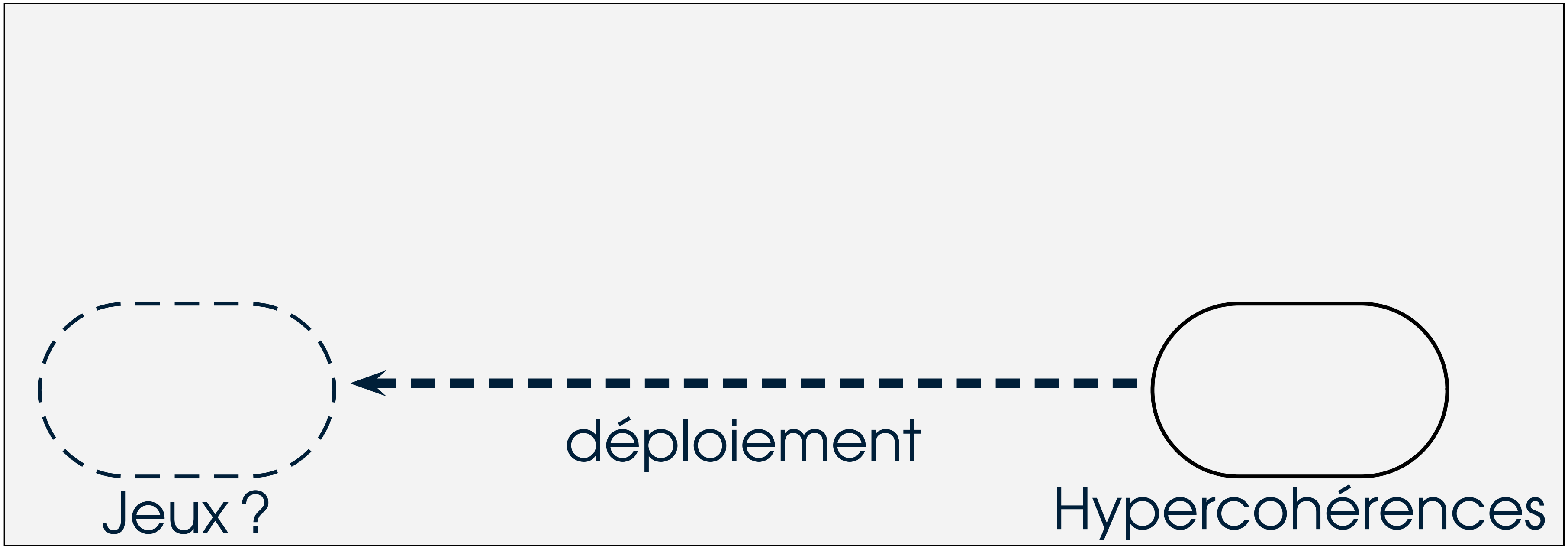
- Déploiement d'hypercohérences
  - reconstruit une temporalité : structure de jeu

Contenu de la thèse



- Déploiement d’hypercohérences
  - reconstruit une temporalité : structure de jeu
  - Jeux polarisés et exponentielles des algorithmes séquentiels

Contenu de la thèse

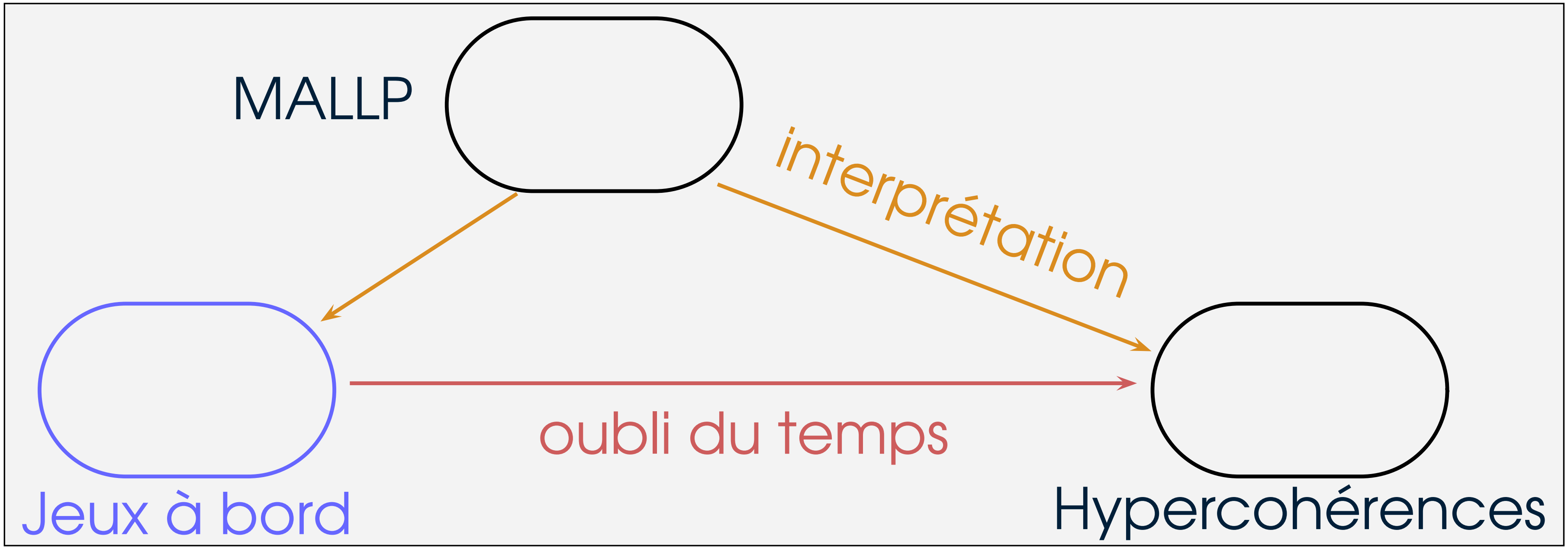


- Déploiement d'hypercohérences
  - reconstruit une temporalité : structure de jeu
  - Jeux polarisés et exponentielles des algorithmes séquentiels
  - résultats de nature heuristique

Contenu de la thèse

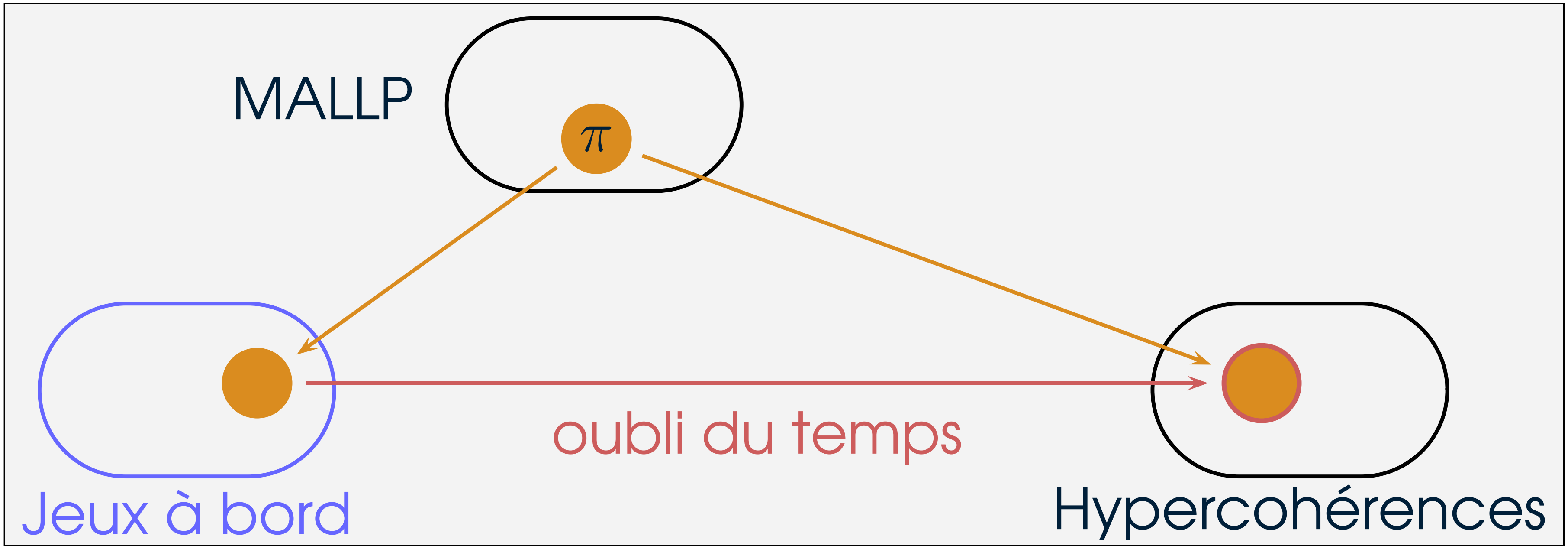
- Jeux à bord

Contenu de la thèse



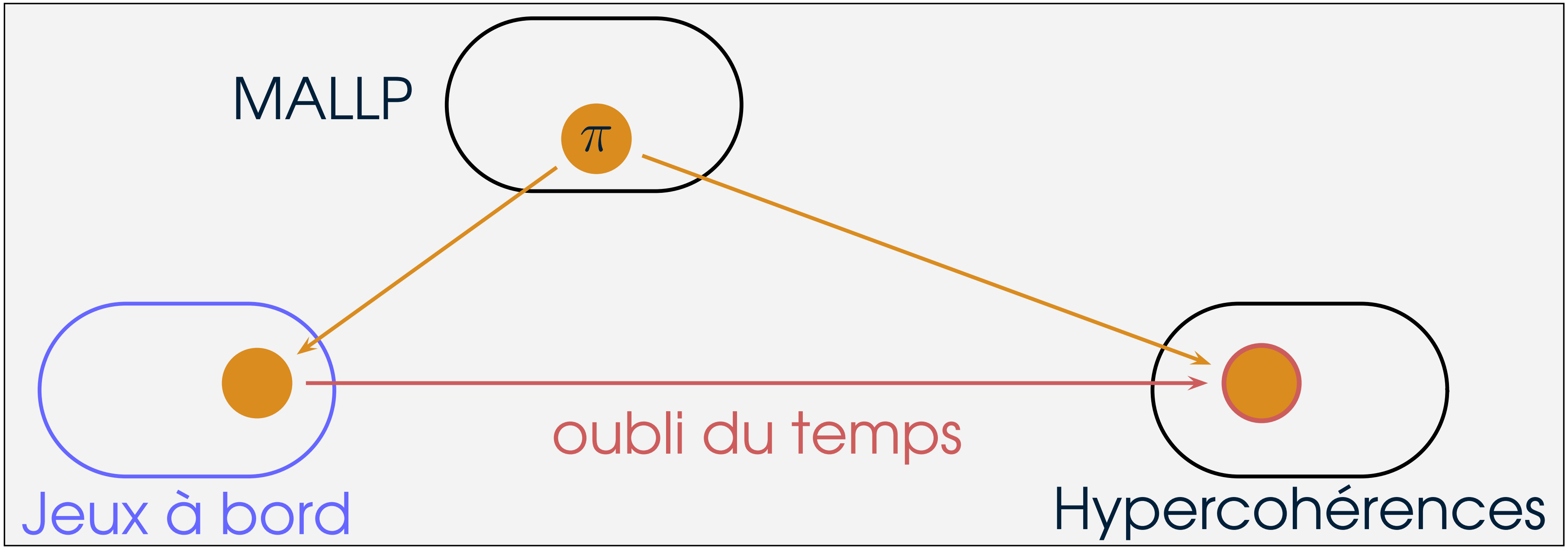
- Jeux à bord
  - Projection (MALLP)

Contenu de la thèse



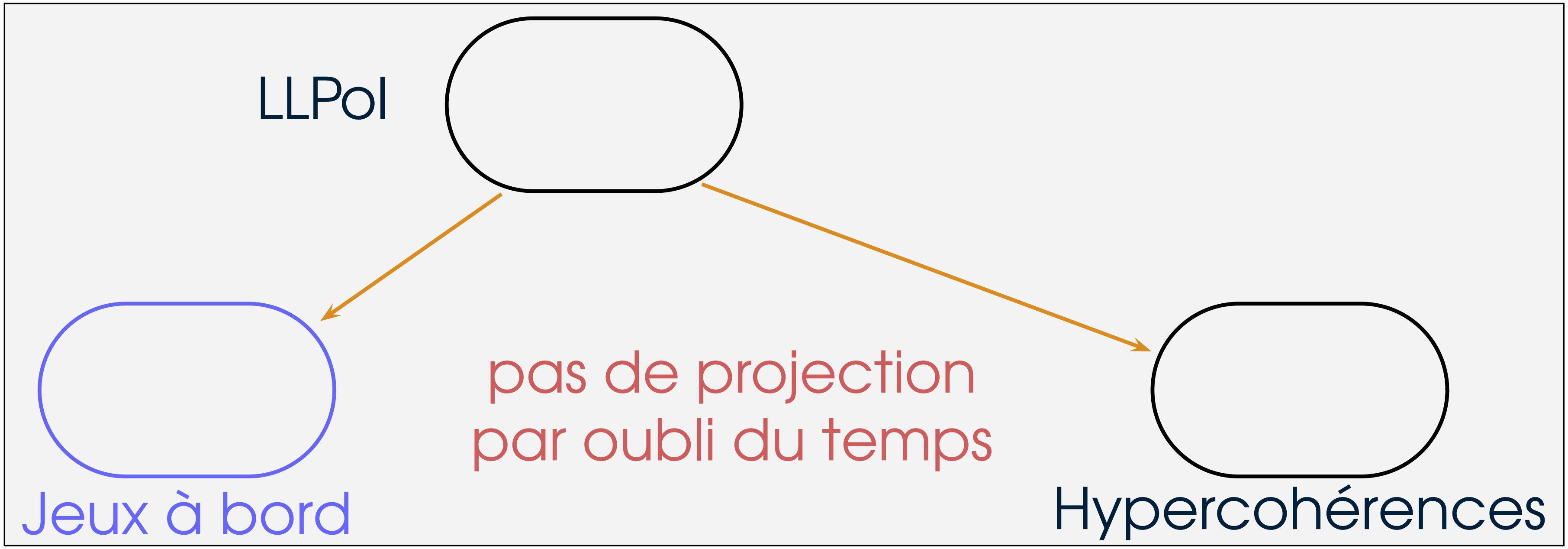
- Jeux à bord
  - Projection (MALLP)

Contenu de la thèse



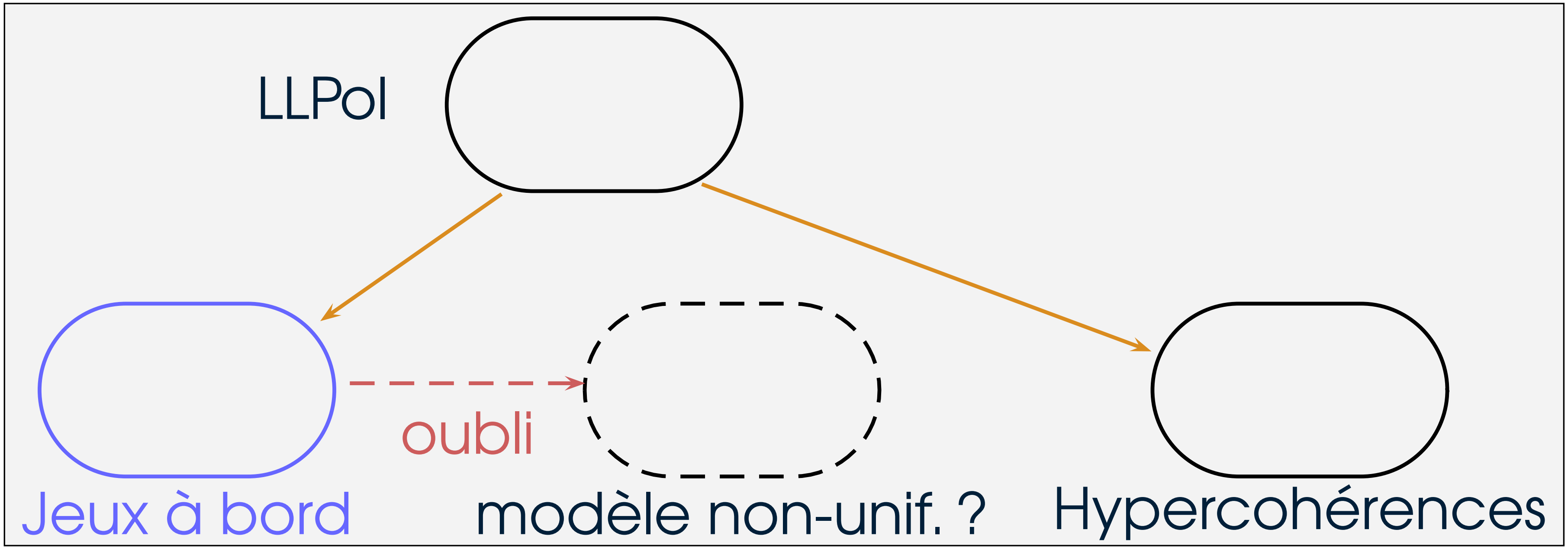
- Jeux à bord
  - Projection (MALLP)
  - Propriétés accessoires : réversibilité, . . .

Contenu de la thèse



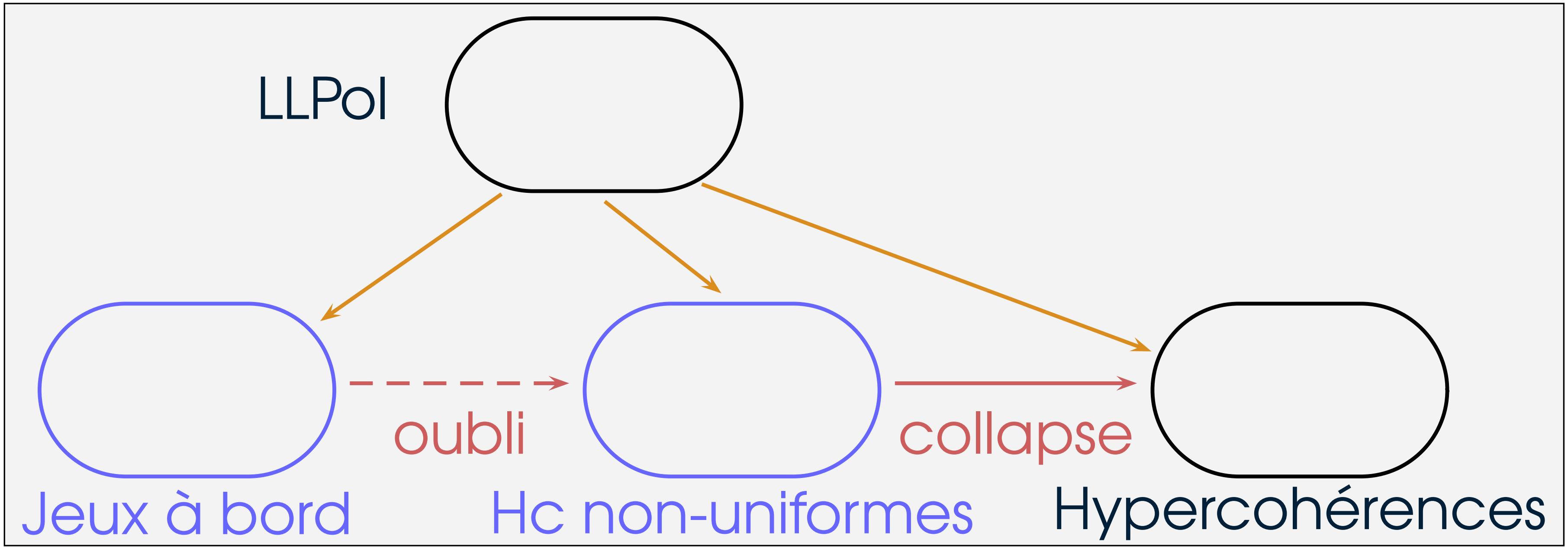
- Jeux à bord
  - Projection (MALLP)
  - Propriétés accessoires : réversibilité, . . .
  - Projection des exponentielles ?

Contenu de la thèse



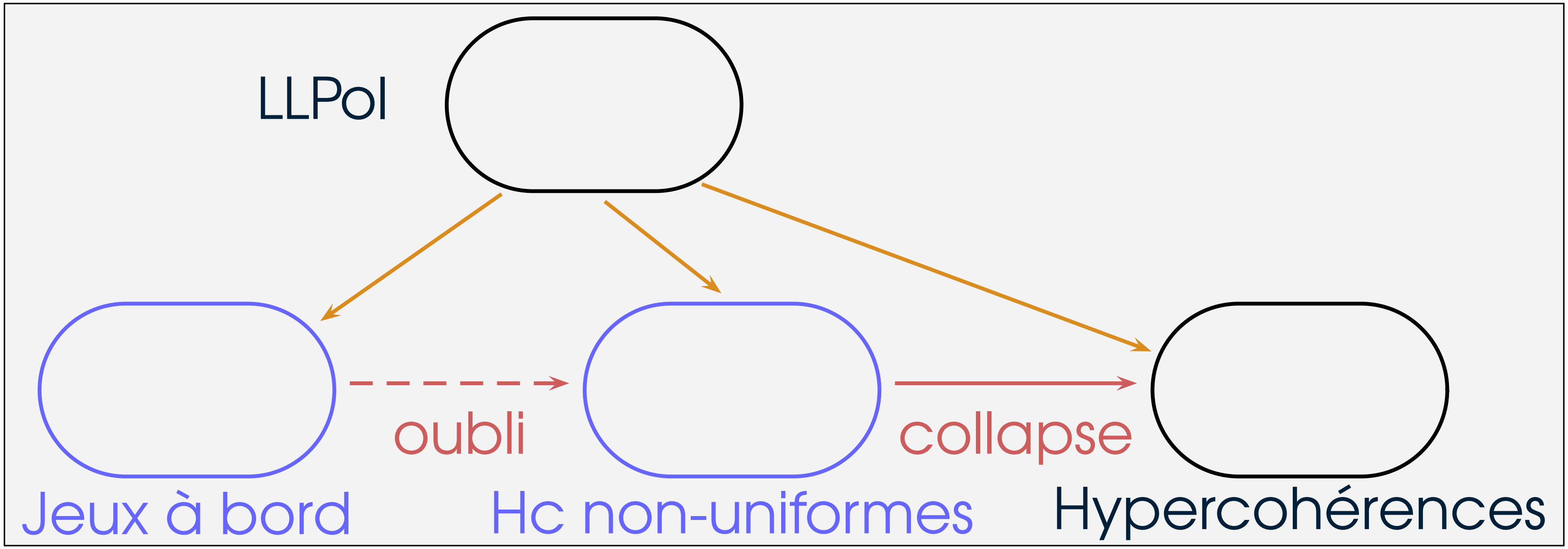
- Développement de la non-uniformité statique

Contenu de la thèse



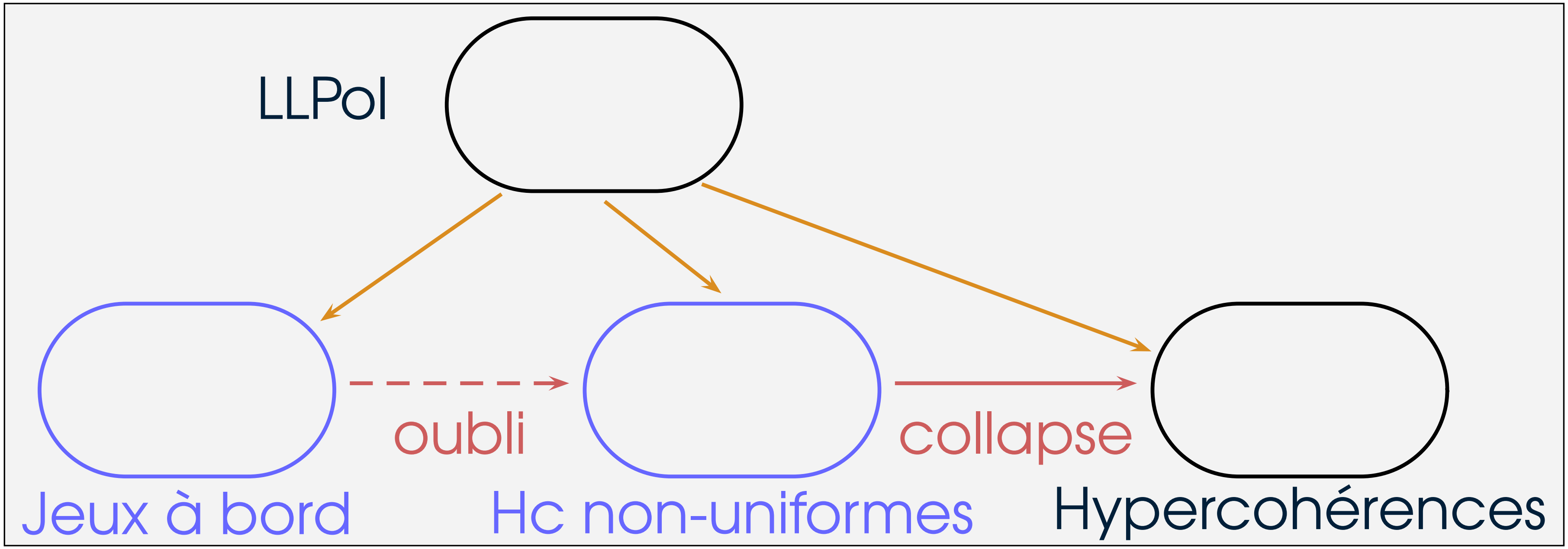
- Développement de la non-uniformité statique
  - Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes.

Contenu de la thèse



- Développement de la non-uniformité statique
  - Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes.
  - Un nouveau modèle statique de la séquentialité : les multicohérences.

Contenu de la thèse



- Développement de la non-uniformité statique
  - Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes.
  - Un nouveau modèle statique de la séquentialité : les multicohérences.
  - Point de vue statique sur l'interactivité du Calcul.

Plan

- Déploiement d'hypercohérences
  - le déploiement en tours
  - le cas du *bien sûr*

- Jeux à bord
  - structure
  - oubli du temps
  - réversibilité

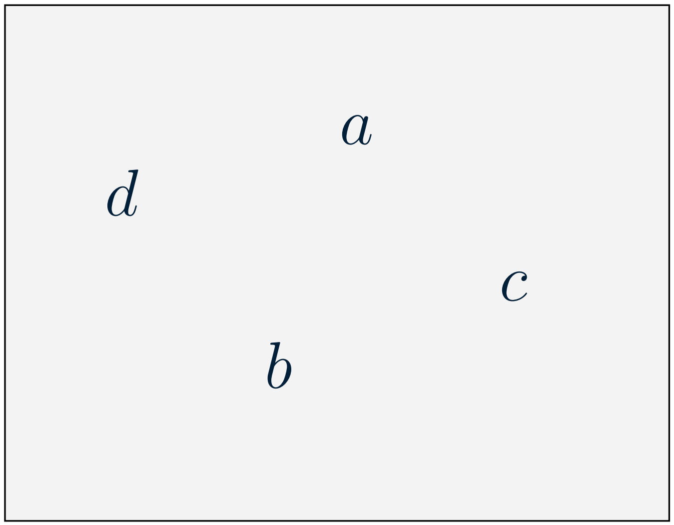
- Non-uniformité statique
  - esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes
  - multicohérences
  - multicohérences $\neq$ hypercohérences

Le déploiement en tours

Une hypercohérence

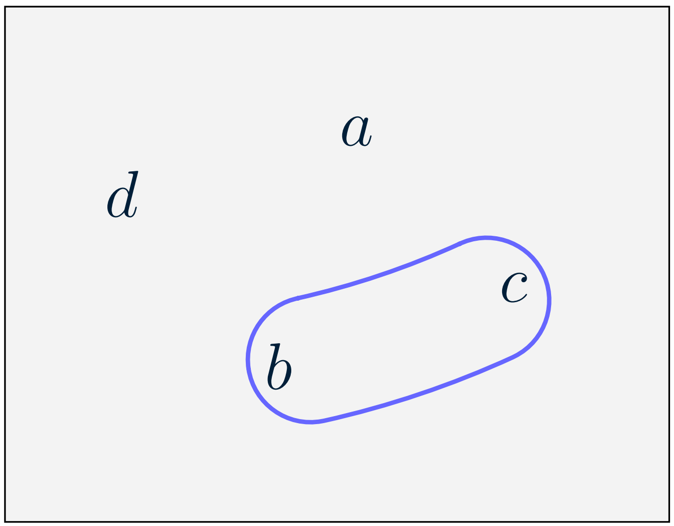
Le déploiement en tours

Une hypercohérence



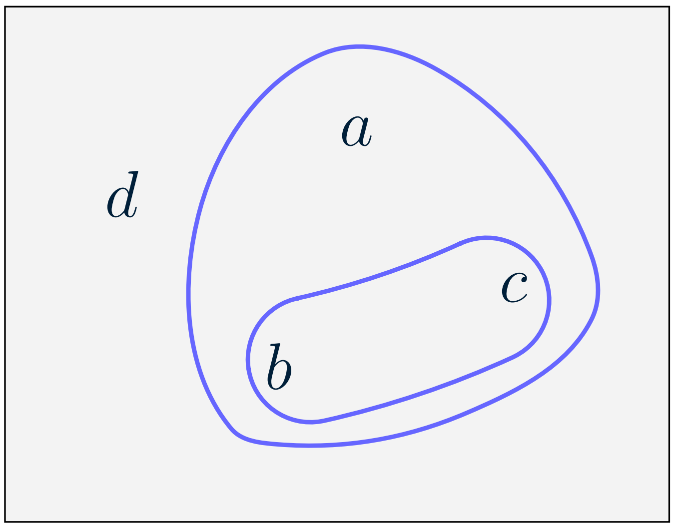
Le déploiement en tours

Une hypercohérence



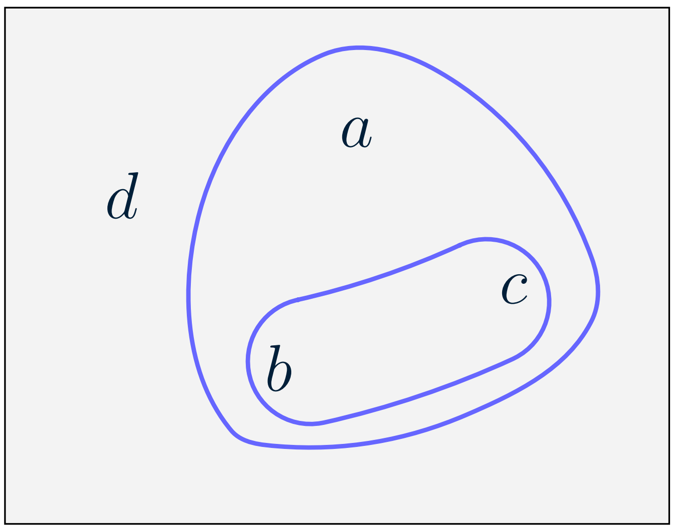
Le déploiement en tours

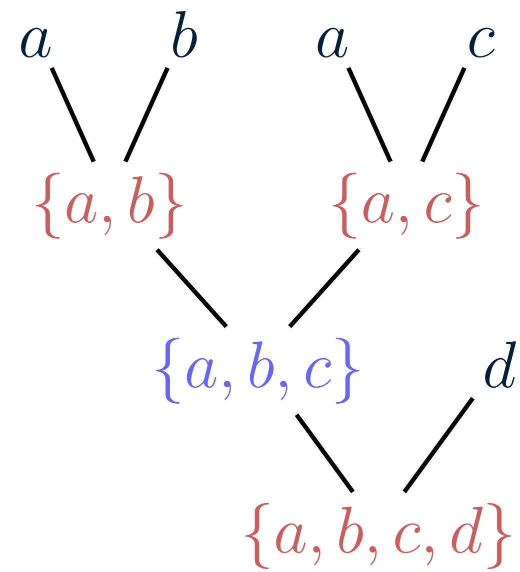
Une hypercohérence



Le déploiement en tours

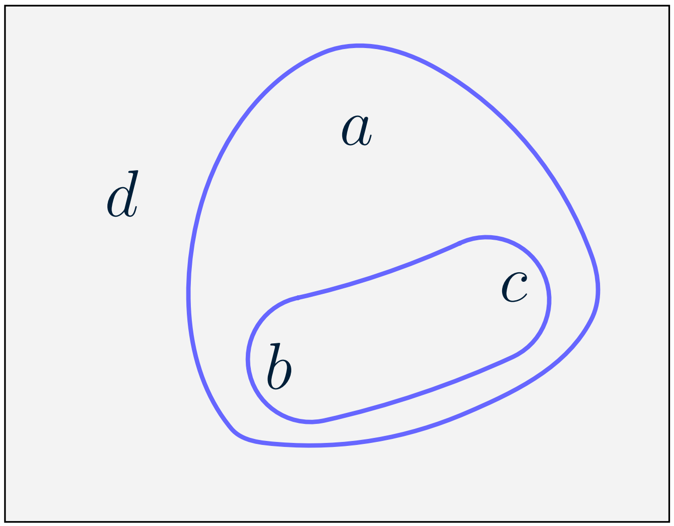
Une hypercohérence

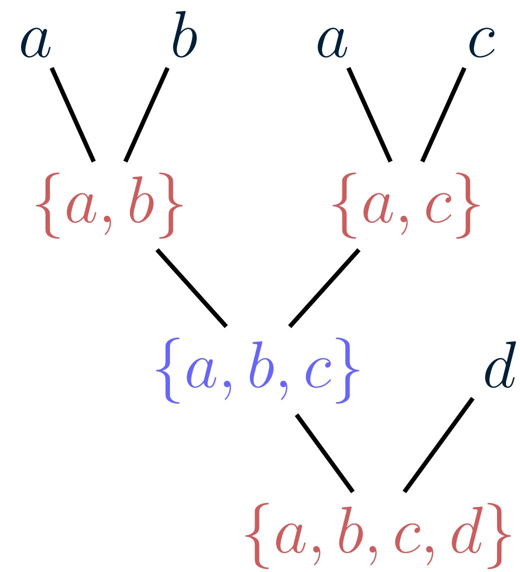




Le déploiement en tours

Une hypercohérence



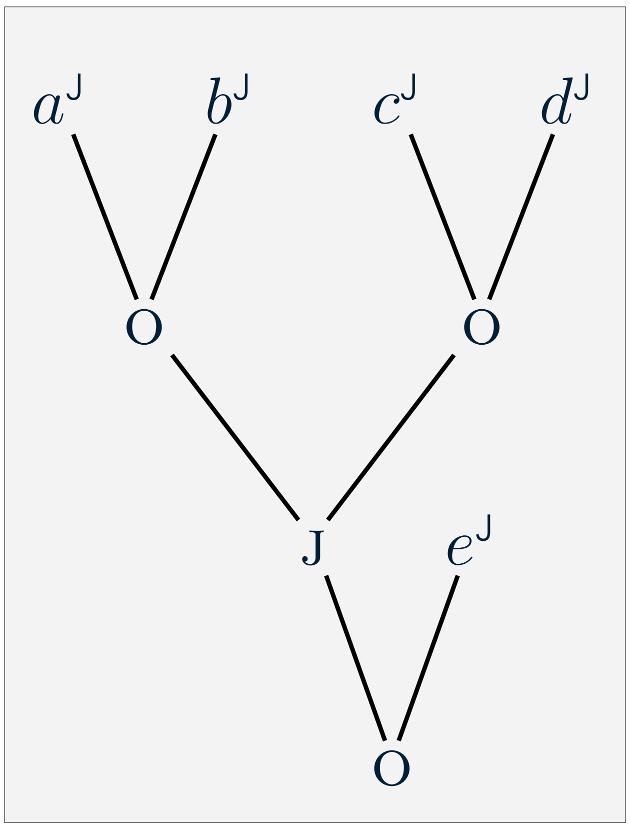


joueur = cohérent

opposant = incohérent

Le cas du *bien sûr*

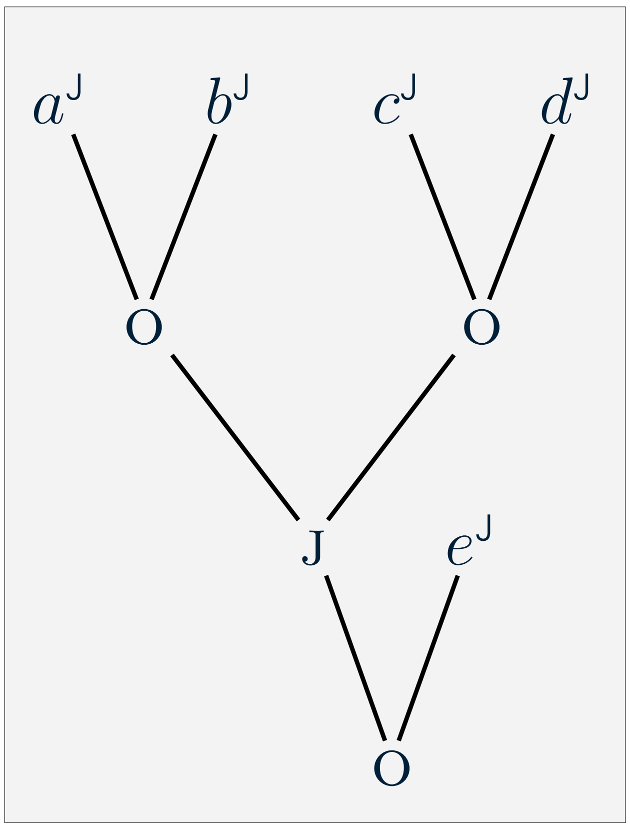
Hypercohérence X



Le cas du *bien sûr*

$|!X| =$ les cliques finies de X

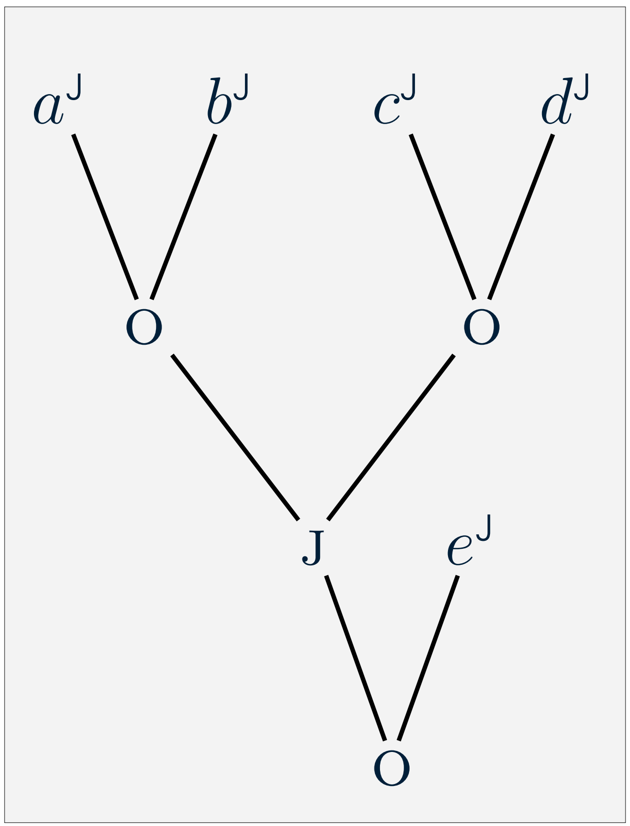
Hypercohérence X



Le cas du *bien sûr*

$|!X|$ = les cliques finies de X

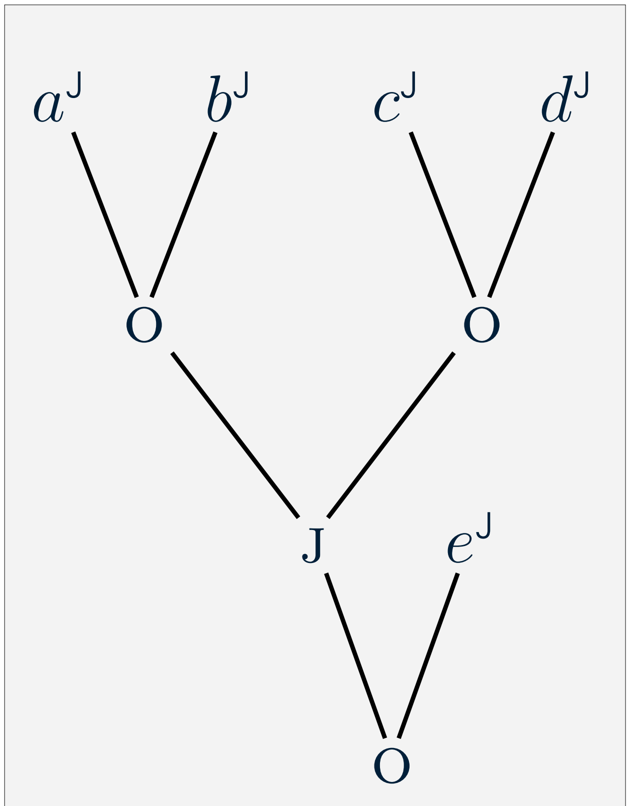
Hypercohérence X



$\emptyset$

Le cas du *bien sûr*

Hypercohérence X



$|!X|$ = les cliques finies de X

$\emptyset$

$\{c\}$ $\{d\}$

$\{a\}$

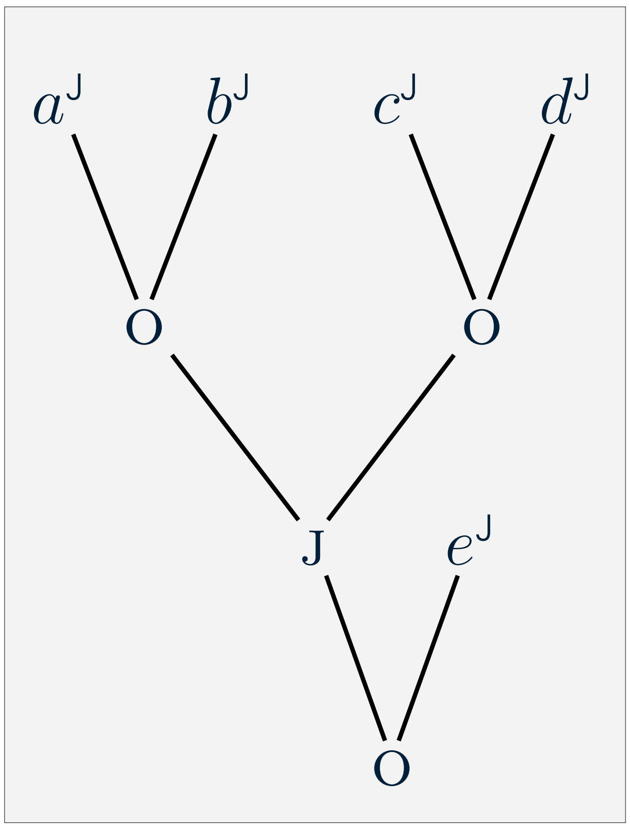
$\{b\}$

$\{e\}$

Le cas du *bien sûr*

$|!X| =$ les cliques finies de X

Hypercohérence X



$\emptyset$

$\{c\}$ $\{d\}$

$\{a\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$

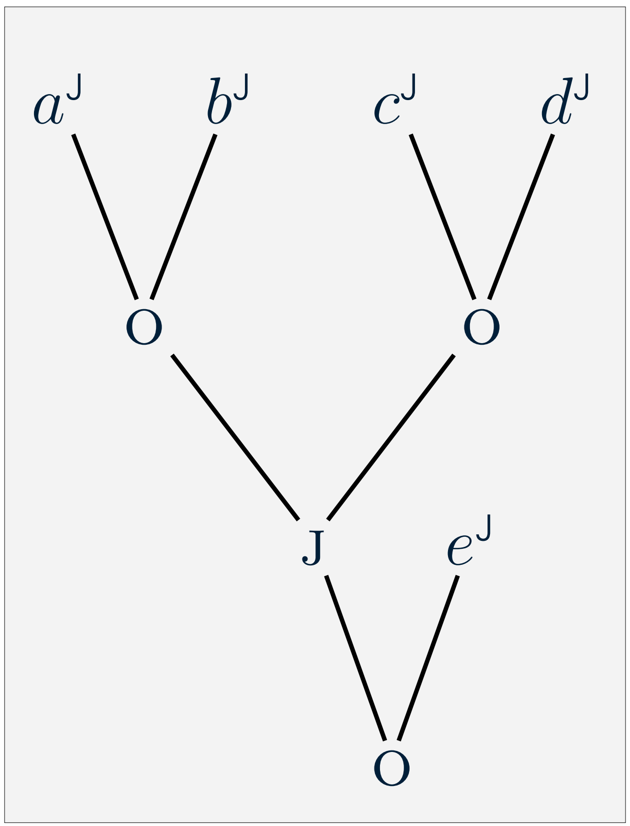
$\{b\}$ $\{b, c\}$ $\{b, d\}$

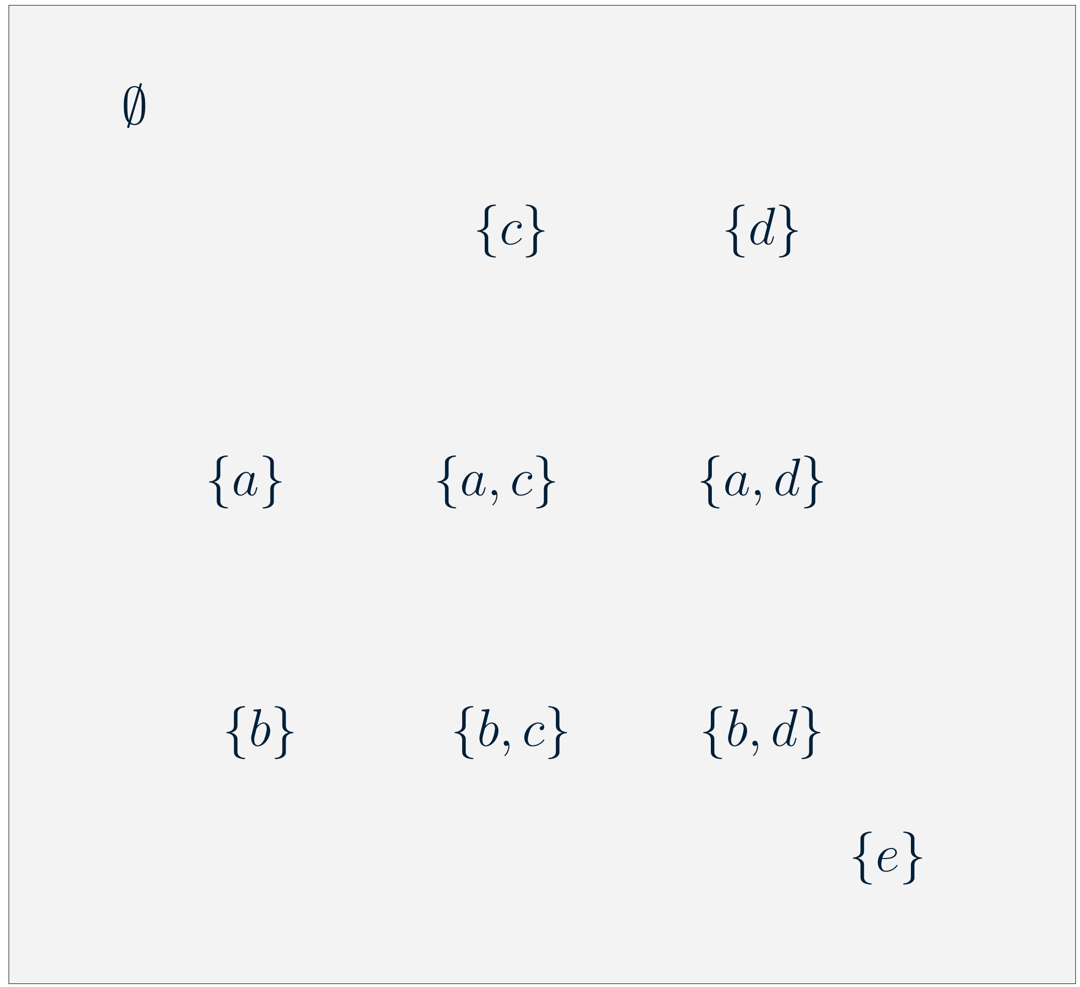
$\{e\}$

Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

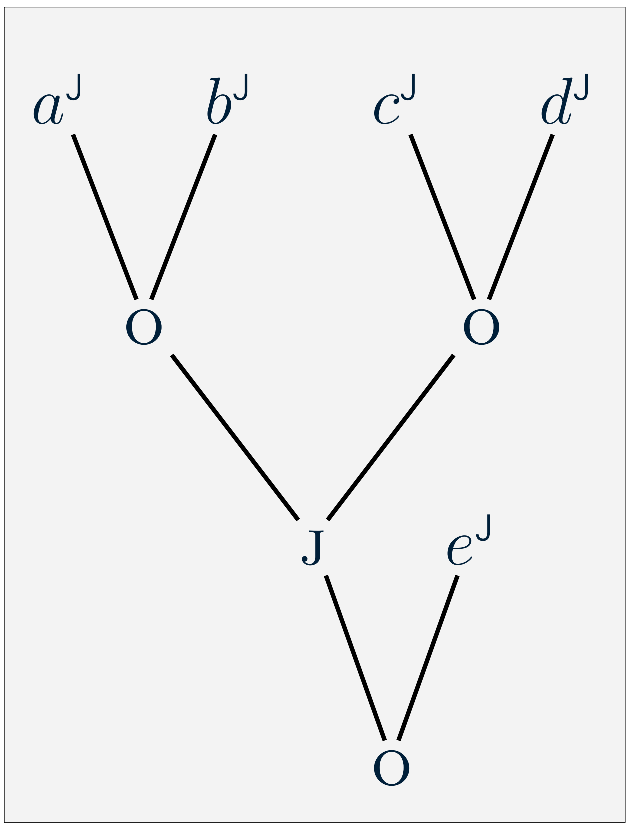


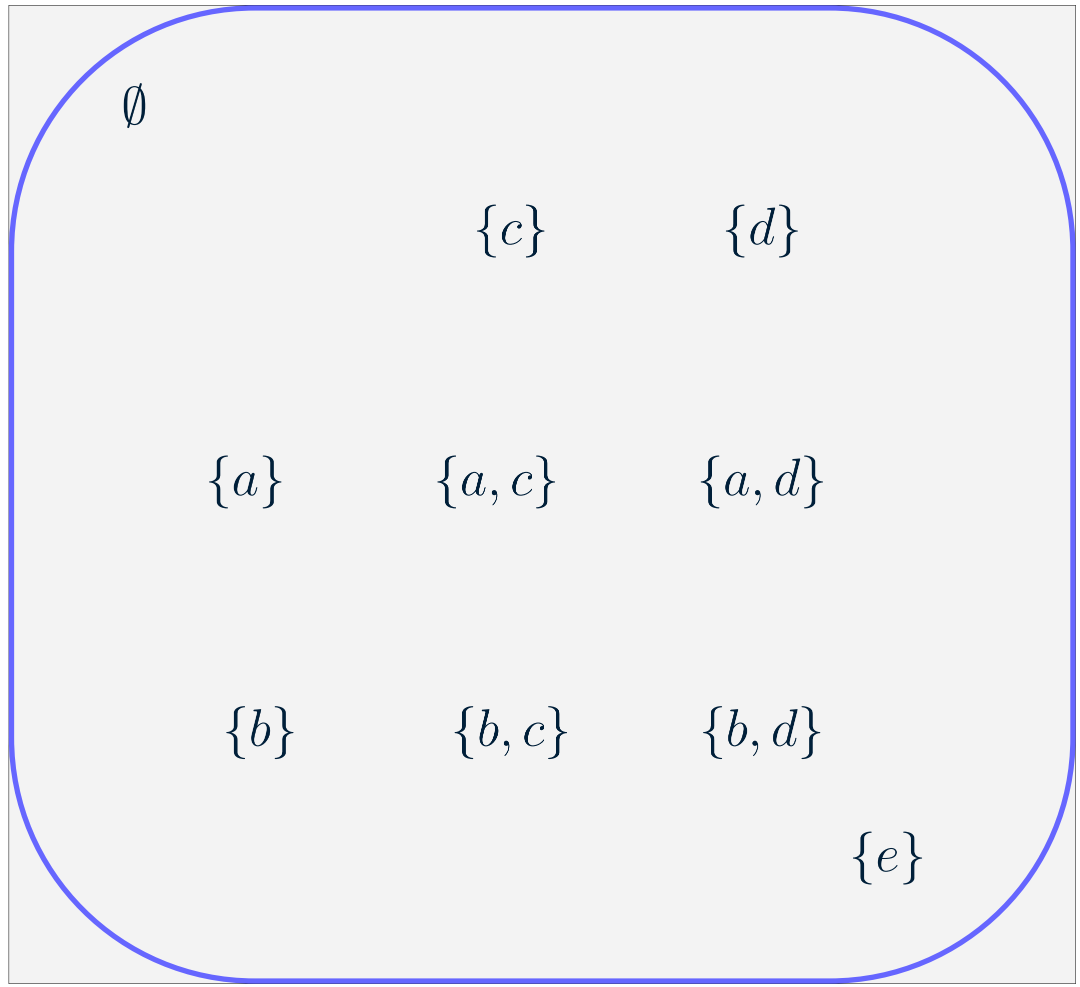


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

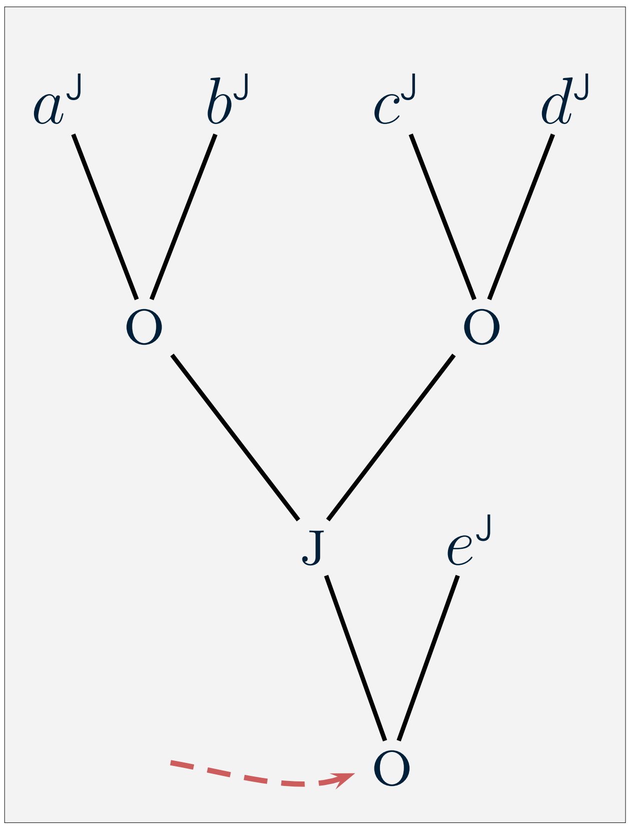


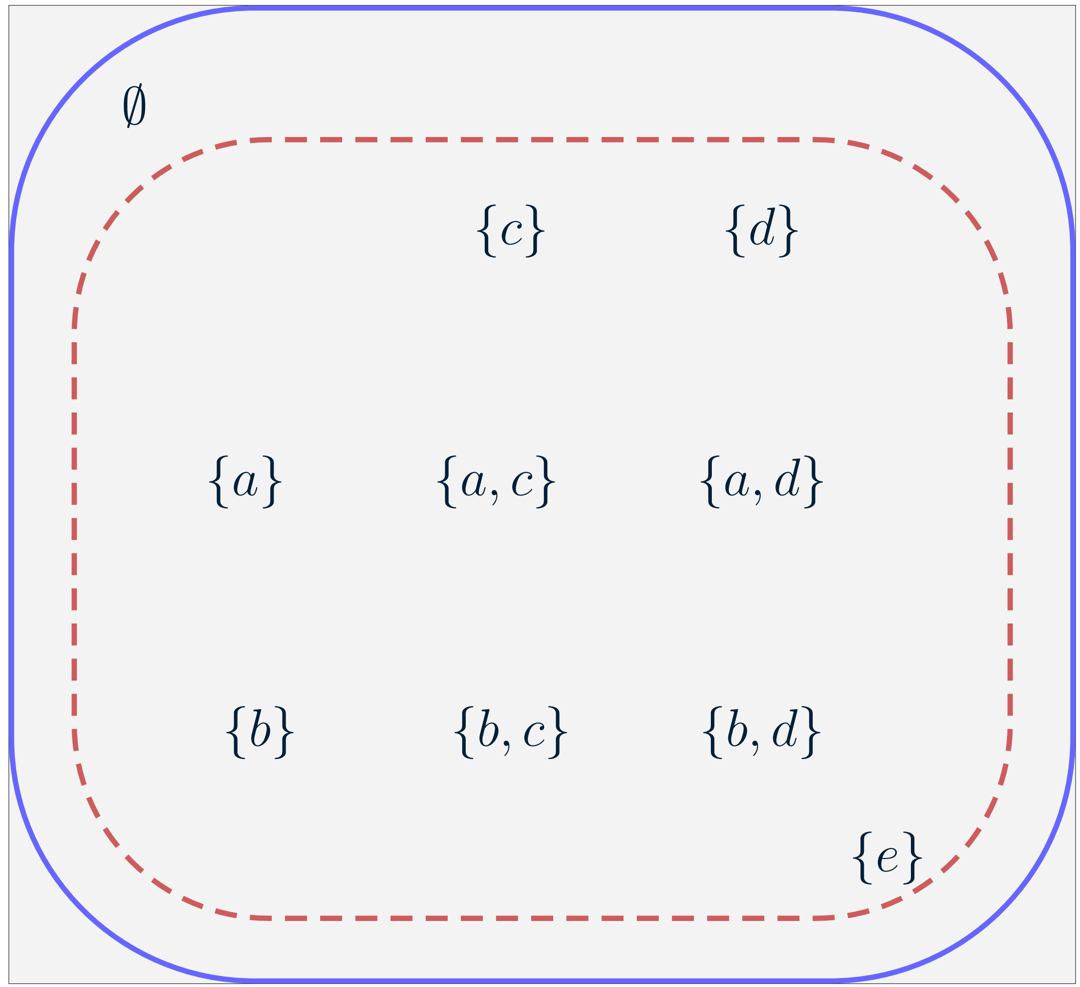


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

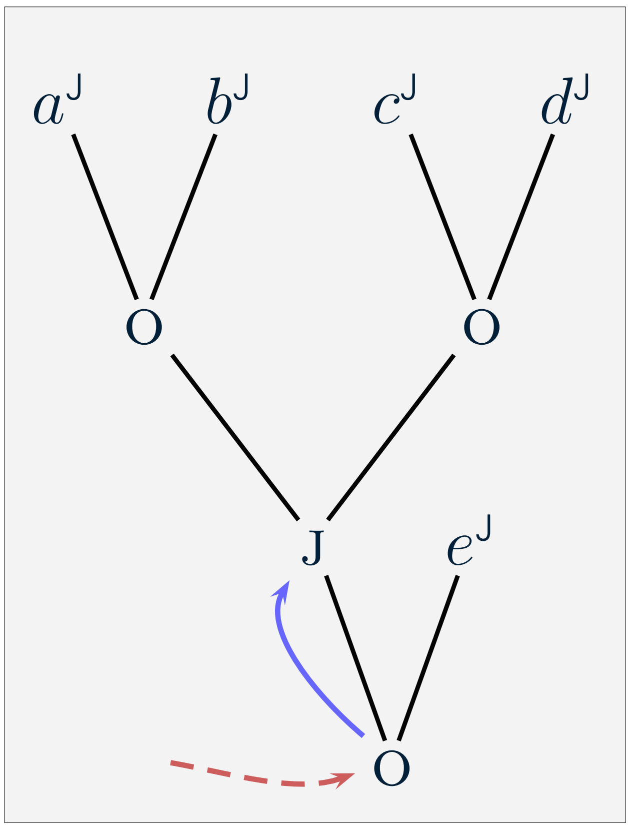


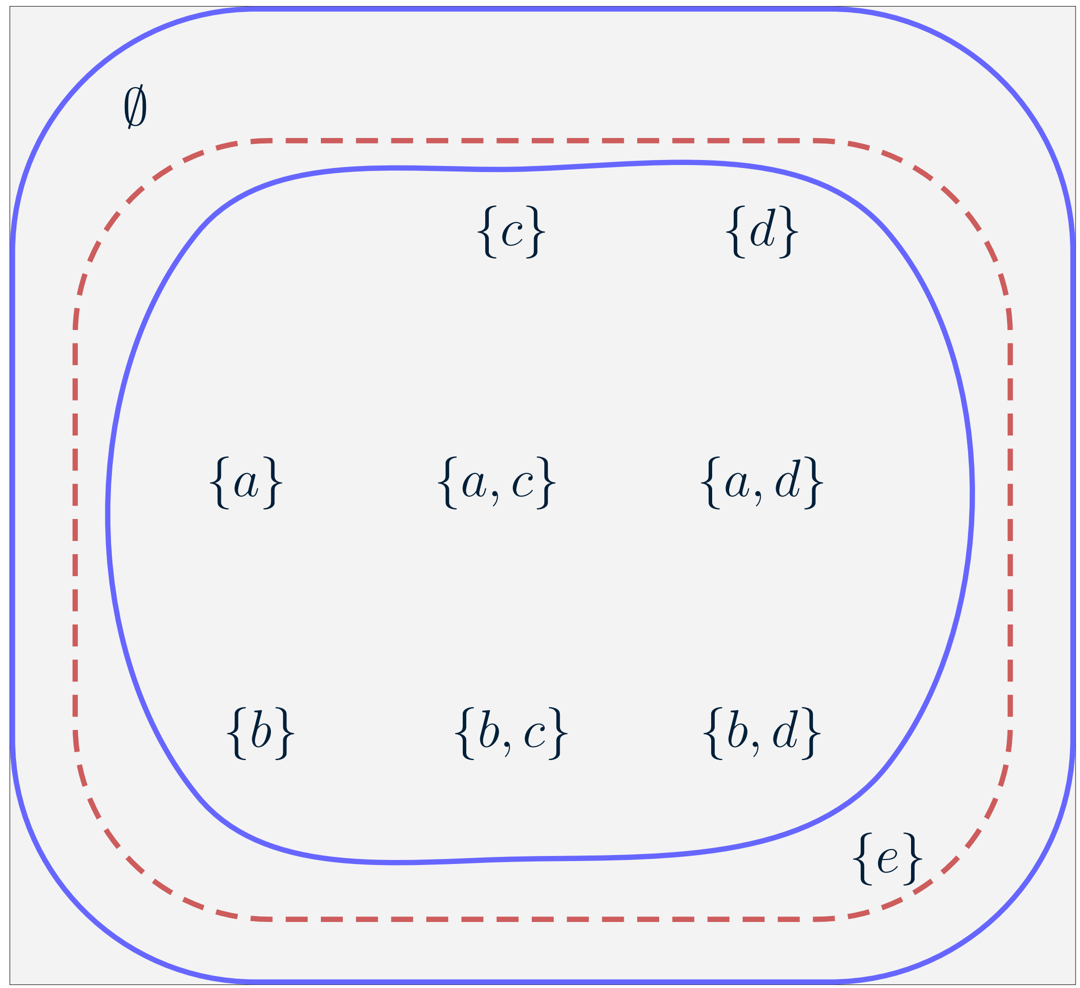


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

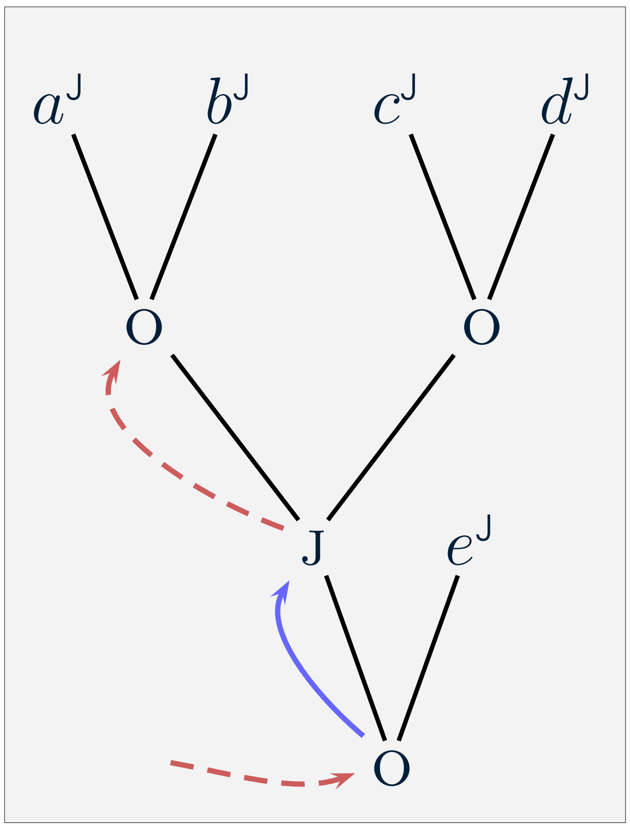


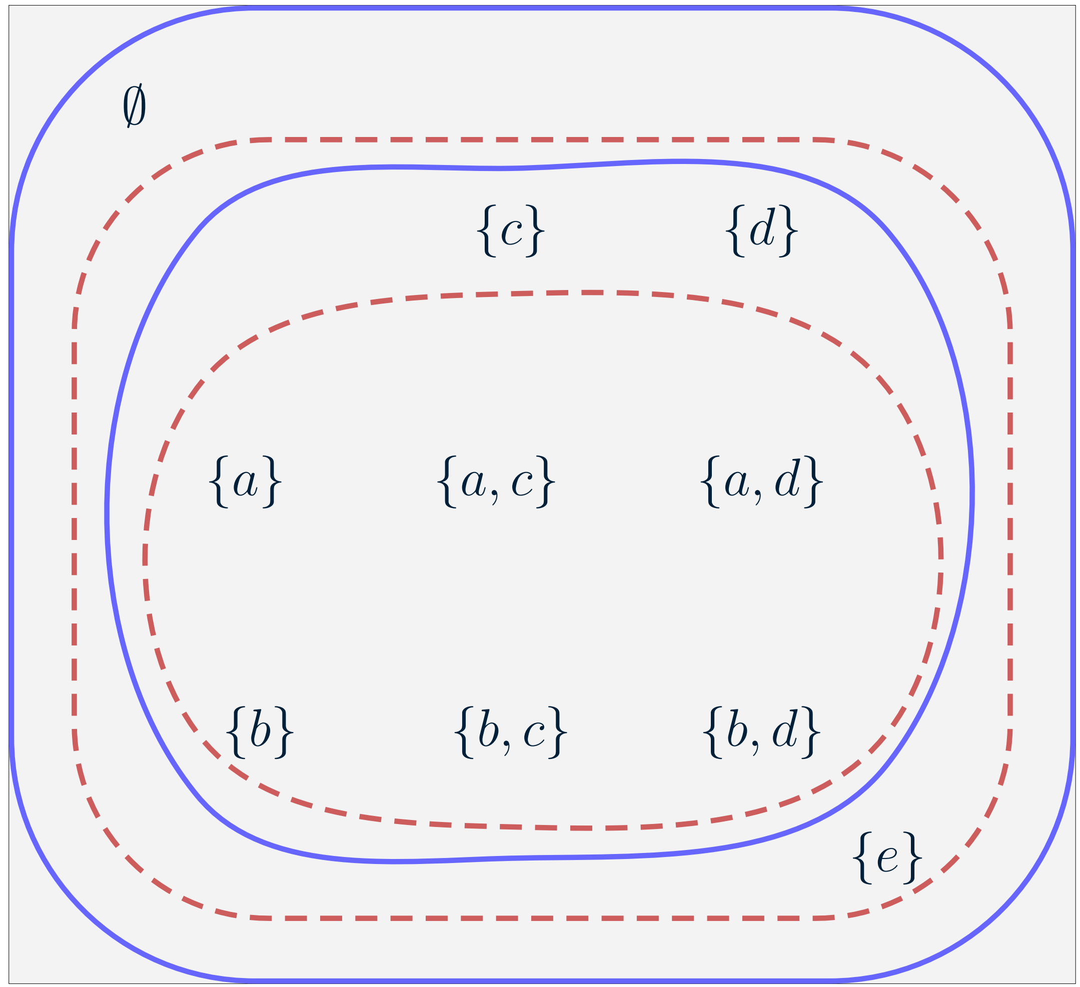


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

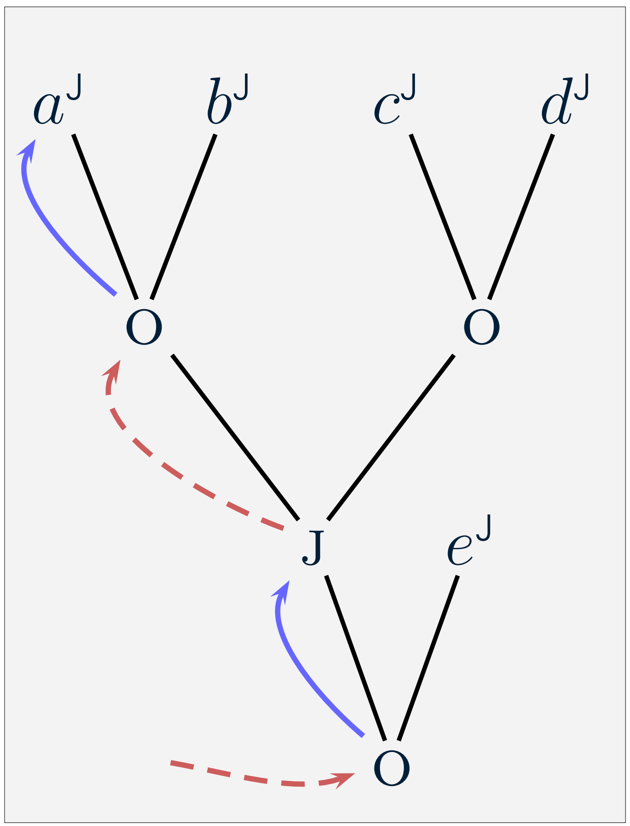


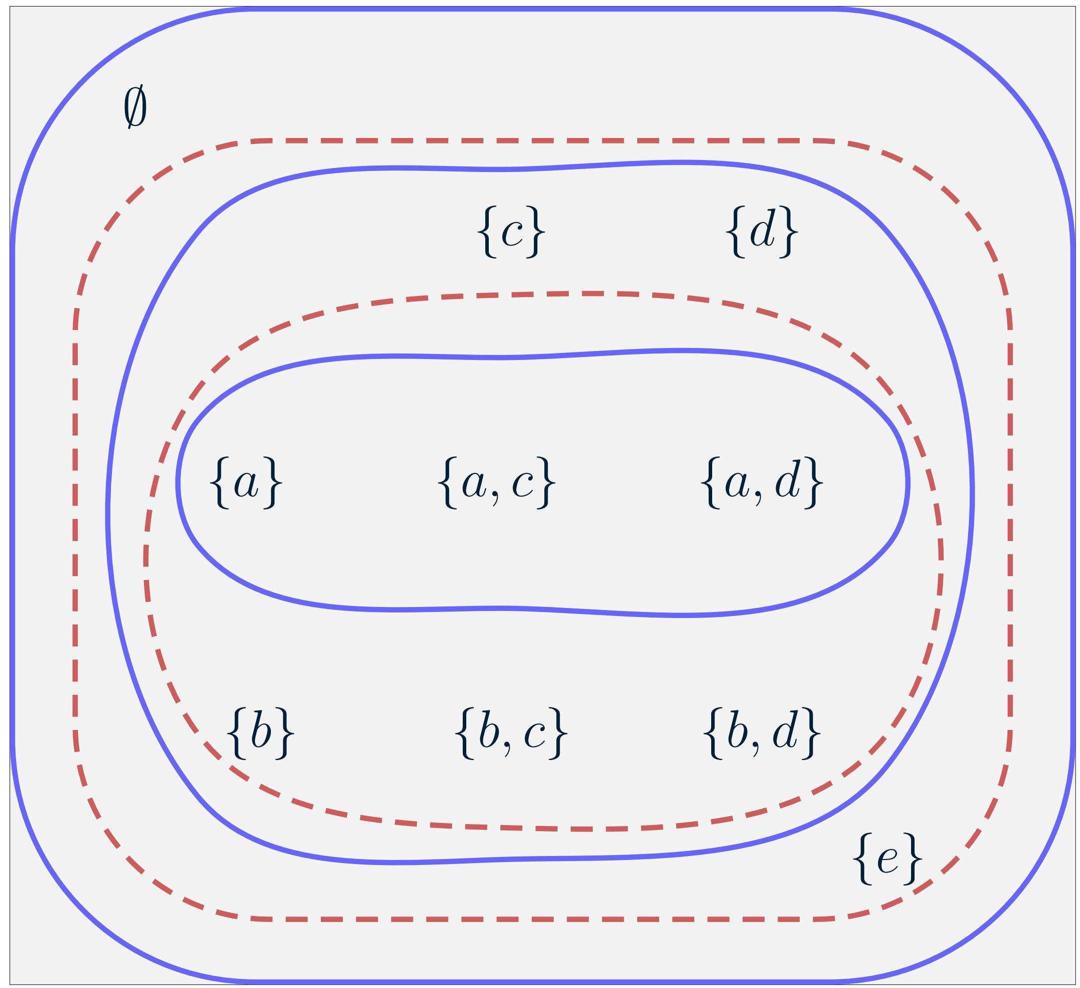


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

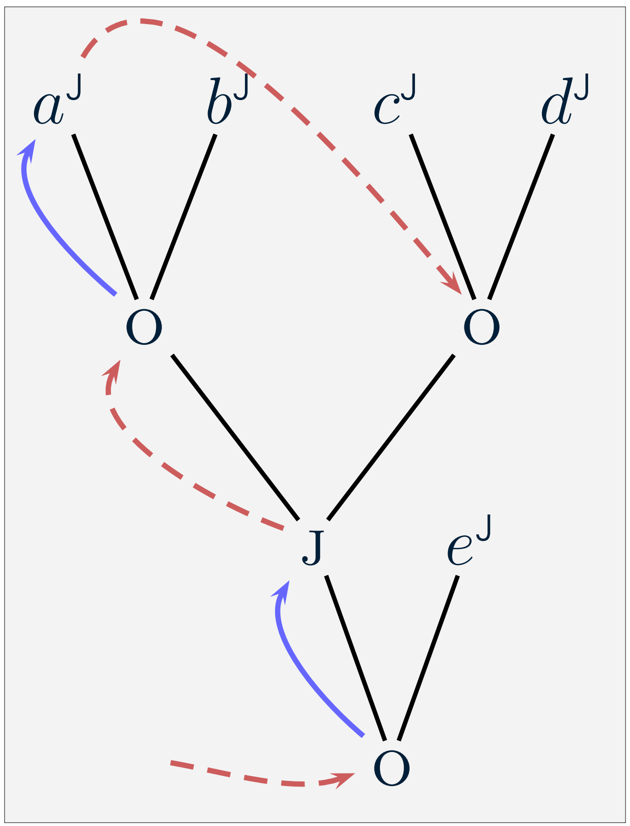


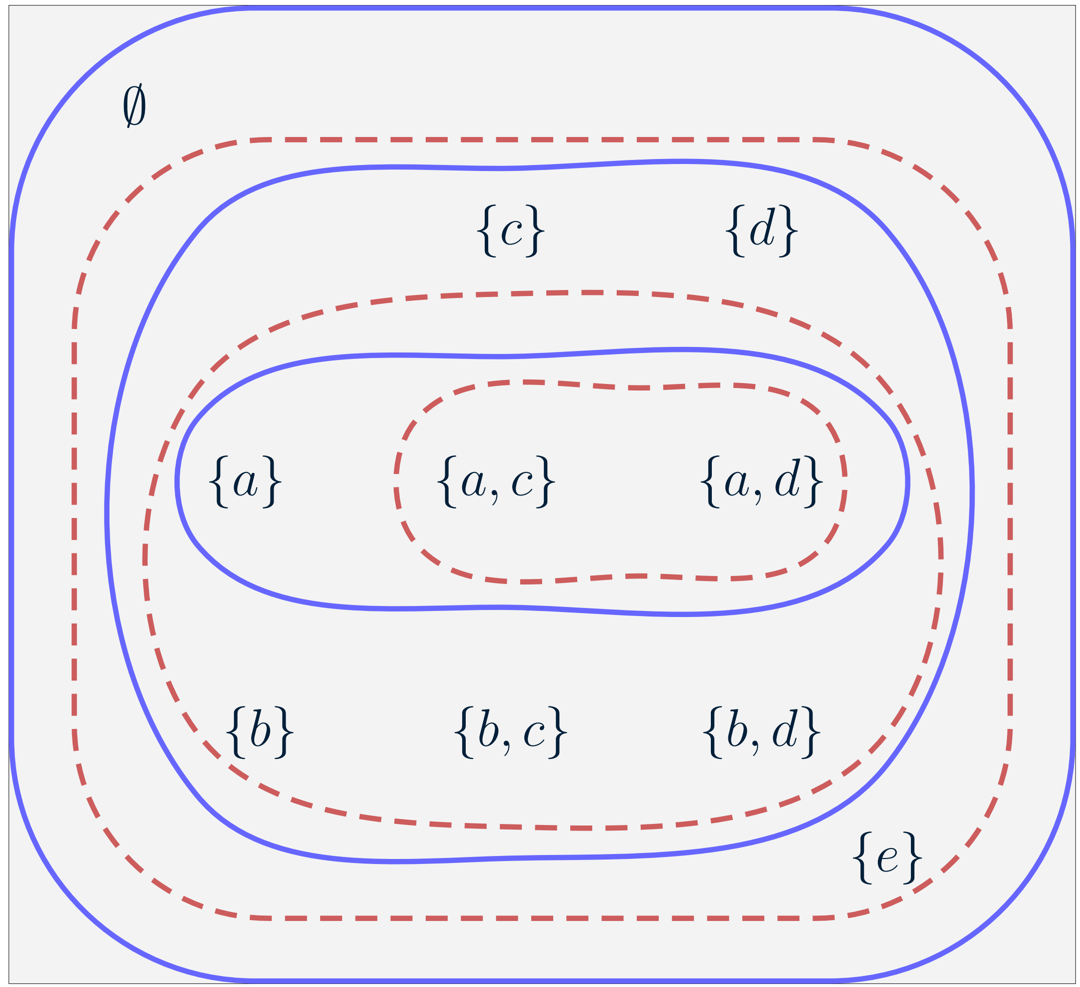


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

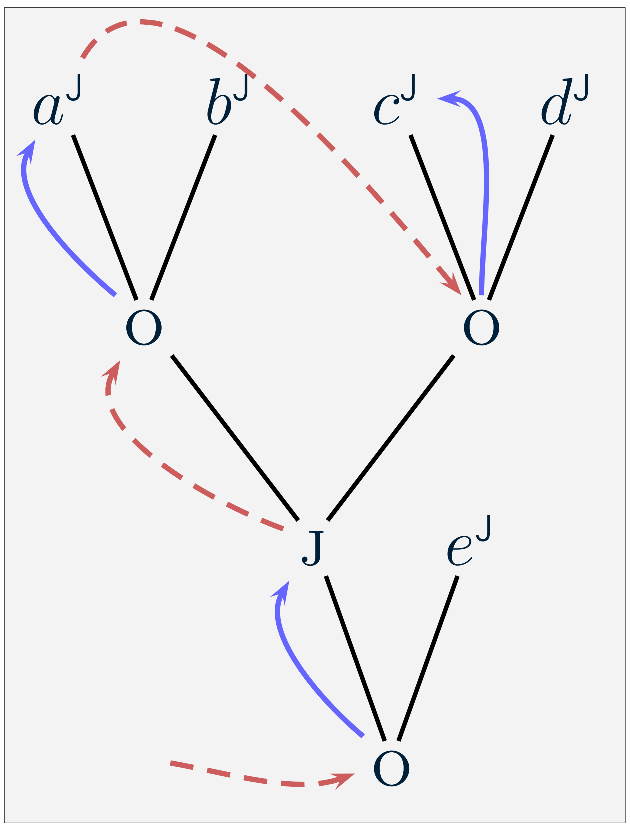


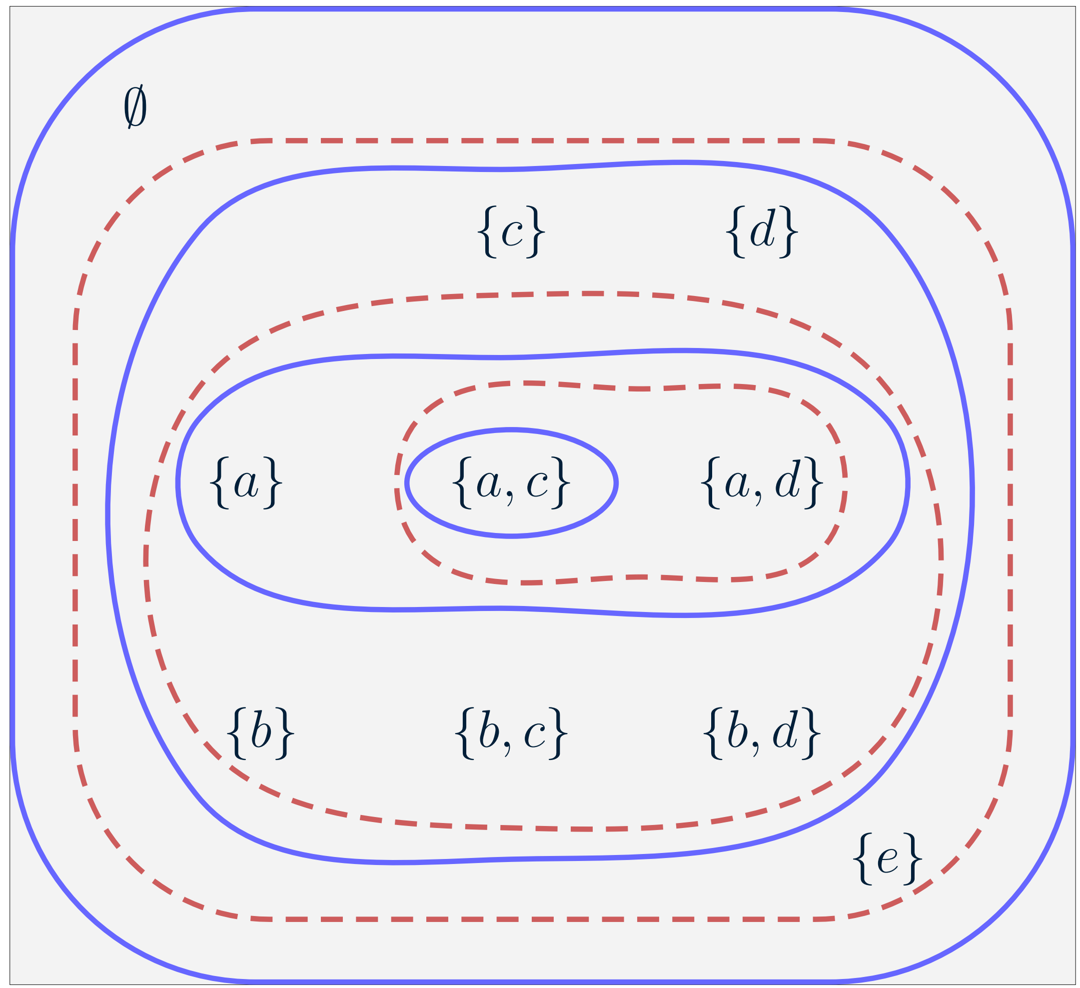


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X

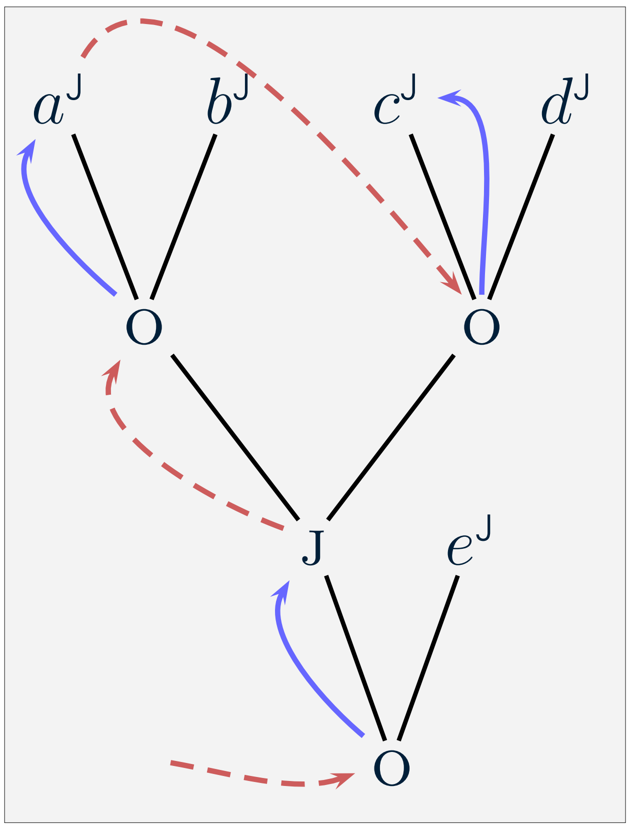


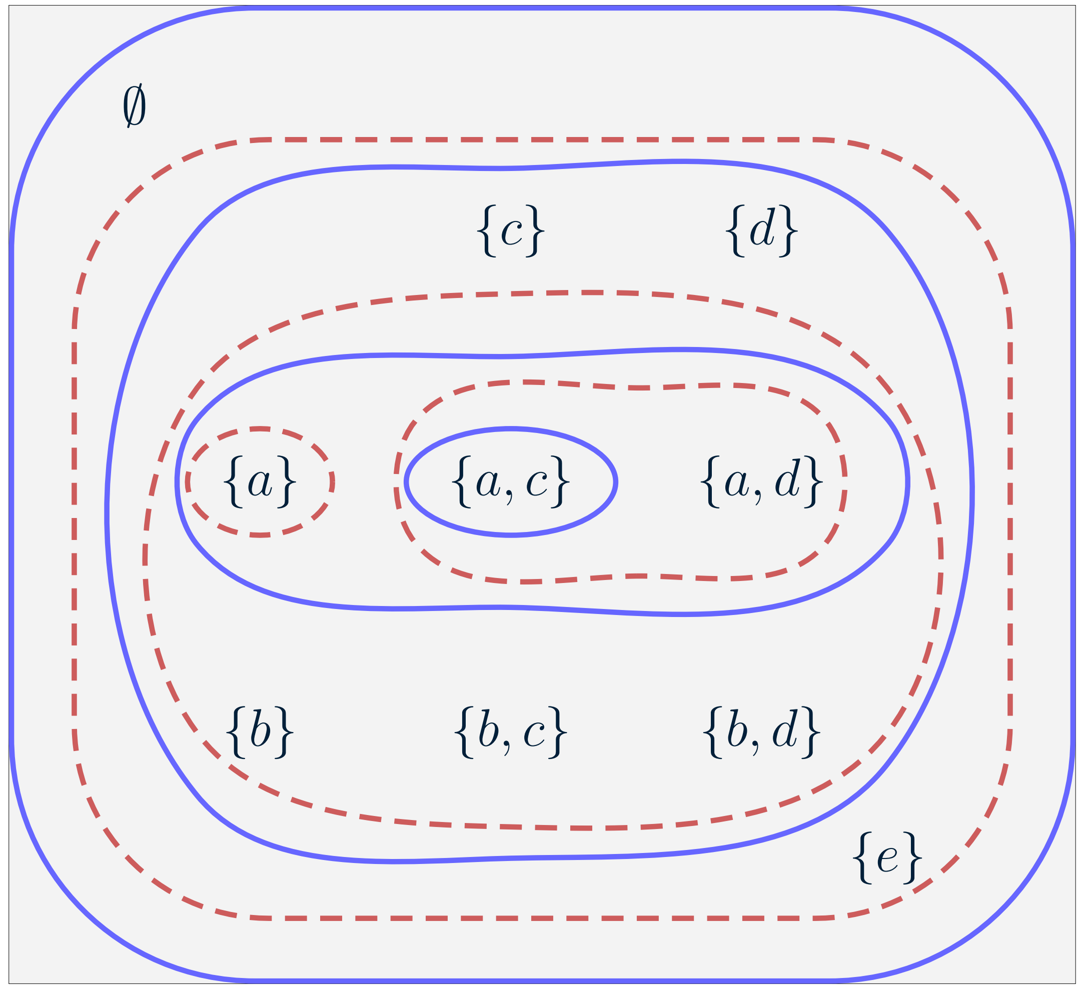


Le cas du *bien sûr*

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérent dans $!X$ s'il existe une section de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ non cohérente dans X.

Hypercohérence X





Plan

- Déploiement d'hypercohérences
  - le déploiement en tours
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - structure
  - oubli du temps
  - réversibilité
- Non-uniformité statique
  - esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes
  - multicohérences
  - multicohérences $\neq$ hypercohérences

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\circ} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\circ} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\circ} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\circ} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\circ} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\bigcirc}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\bigcirc} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\bigcirc} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\bigcirc} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\bigcirc} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\bigcirc} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\bigcirc}$$

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\bigcirc}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\bigcirc} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\bigcirc} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\bigcirc} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\bigcirc} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\bigcirc} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\bigcirc} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\bigcirc}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{\mathsf{J}} a_2{}^{\mathsf{O}} a_3{}^{\mathsf{J}} \cdots a_{2n}{}^{\mathsf{O}}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{O}} b_2{}^{\mathsf{J}} b_3{}^{\mathsf{O}} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{J}}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{\mathsf{J}} b_2{}^{\mathsf{O}} b_3{}^{\mathsf{J}} \cdots b_{2n'}{}^{\mathsf{O}} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{\mathsf{J}} a_2{}^{\mathsf{O}} a_3{}^{\mathsf{J}} b_1{}^{\mathsf{O}} \cdots a_{2n-1}{}^{\mathsf{J}} (a_{2n}, b_{2n'})^{\mathsf{O}}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur
- réversibilité

Les jeux à bord

$$P = \text{mots} \quad a_1{}^{J} a_2{}^{\circ} a_3{}^{J} \cdots a_{2n}{}^{\circ}$$

$$N = \text{mots} \quad b_1{}^{\circ} b_2{}^{J} b_3{}^{\circ} \cdots b_{2n'}{}^{J}$$

- bonne terminaison
- formules :

$$N^{\perp} = \text{mots} \quad b_1{}^{J} b_2{}^{\circ} b_3{}^{J} \cdots b_{2n'}{}^{\circ} \qquad (P')$$

$$P \otimes P' = \text{mots} \quad (a_1, b_1)^{J} a_2{}^{\circ} a_3{}^{J} b_1{}^{\circ} \cdots a_{2n-1}{}^{J} (a_{2n}, b_{2n'})^{\circ}$$

- preuve : stratégie pour le Joueur
- réversibilité
- oubli du temps

Plan

- Déploiement d'hypercohérences
  - le déploiement en tours
  - le cas du *bien sûr*
- Jeux à bord
  - structure
  - oubli du temps
  - réversibilité
- Non-uniformité statique
  - esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes
  - multicohérences
  - multicohérences $\neq$ hypercohérences

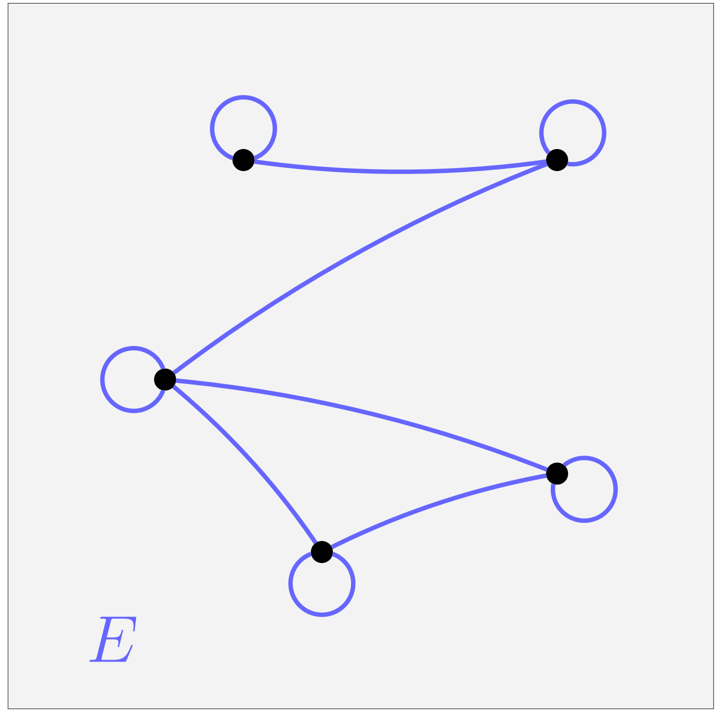
L'uniformité des exponentielles

$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ P_1\ \texttt{sinon}\ P_2\ \}$$
$$\texttt{sinon}\ \{\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ P_3\ \texttt{sinon}\ P_4\ \}$$

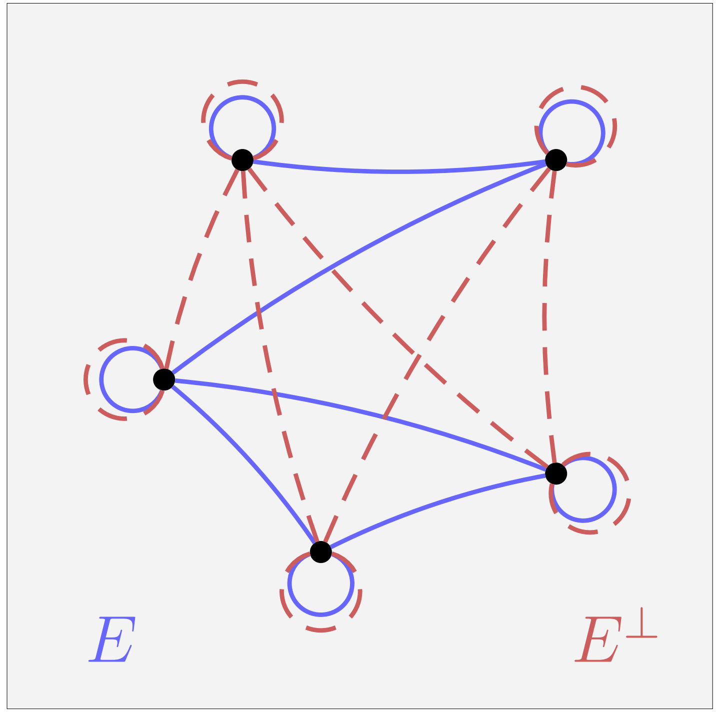
L'uniformité des exponentielles

$$P(b) = \texttt{si}\ b\ \ \texttt{alors}\ \texttt{\{}\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ P_1\ \texttt{sinon}\ P_2\ \texttt{\}}$$
$$\texttt{sinon}\ \texttt{\{}\ \texttt{si}\ b\ \texttt{alors}\ P_3\ \texttt{sinon}\ P_4\ \texttt{\}}$$

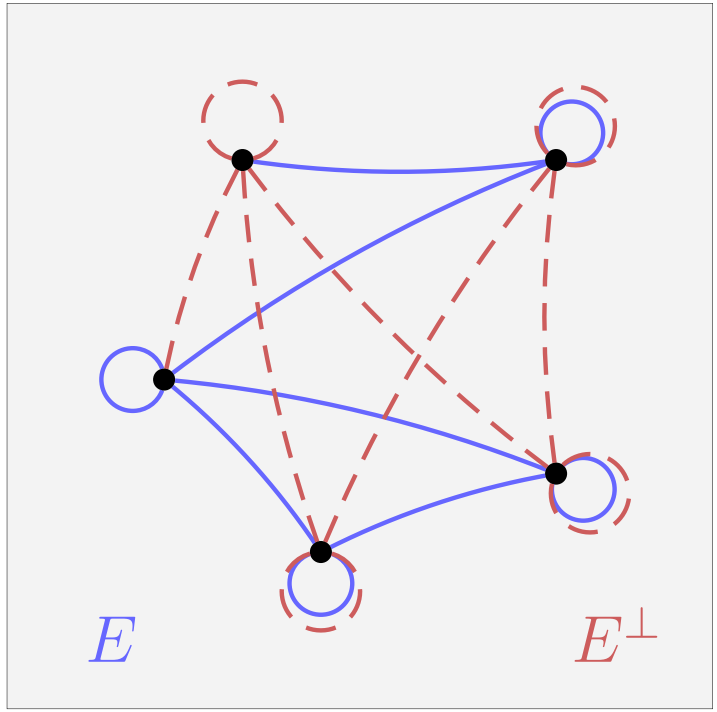
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



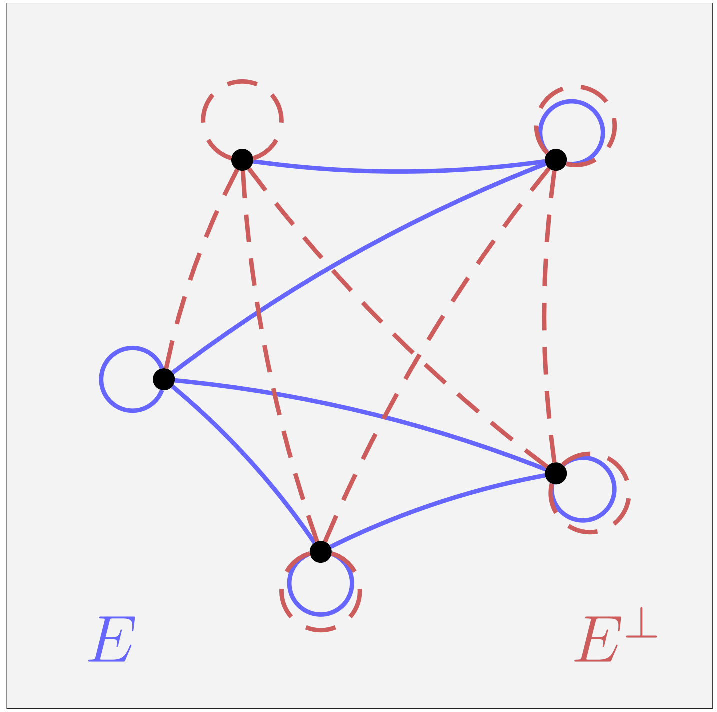
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



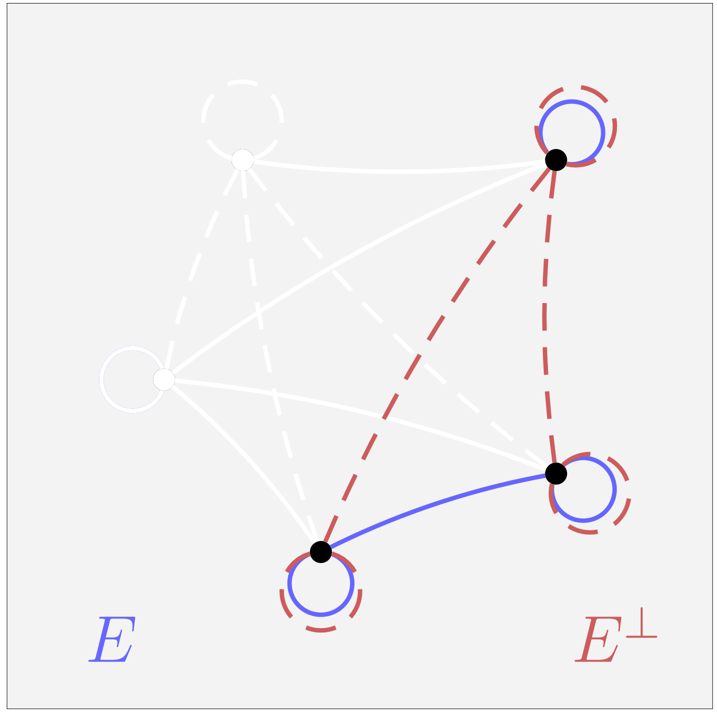
Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



$$P(b) = \texttt{si } b \;\; \texttt{alors \{ si } b \texttt{ alors v sinon f \}}$$
$$\qquad\qquad\qquad \texttt{sinon \{ si } b \texttt{ alors v sinon f \}}$$

$$\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}),([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}),([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$$

Esp. cohérents et hypercohérences non-uniformes



$P(b) =$ `si` b `alors { si` b `alors v sinon f }`

`sinon { si` b `alors v sinon f }`

$$\{([\mathtt{v},\mathtt{v}],\mathtt{v}), ([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{f}), ([\mathtt{v},\mathtt{f}],\mathtt{v}), ([\mathtt{f},\mathtt{f}],\mathtt{f})\}$$

Multicohérences

Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

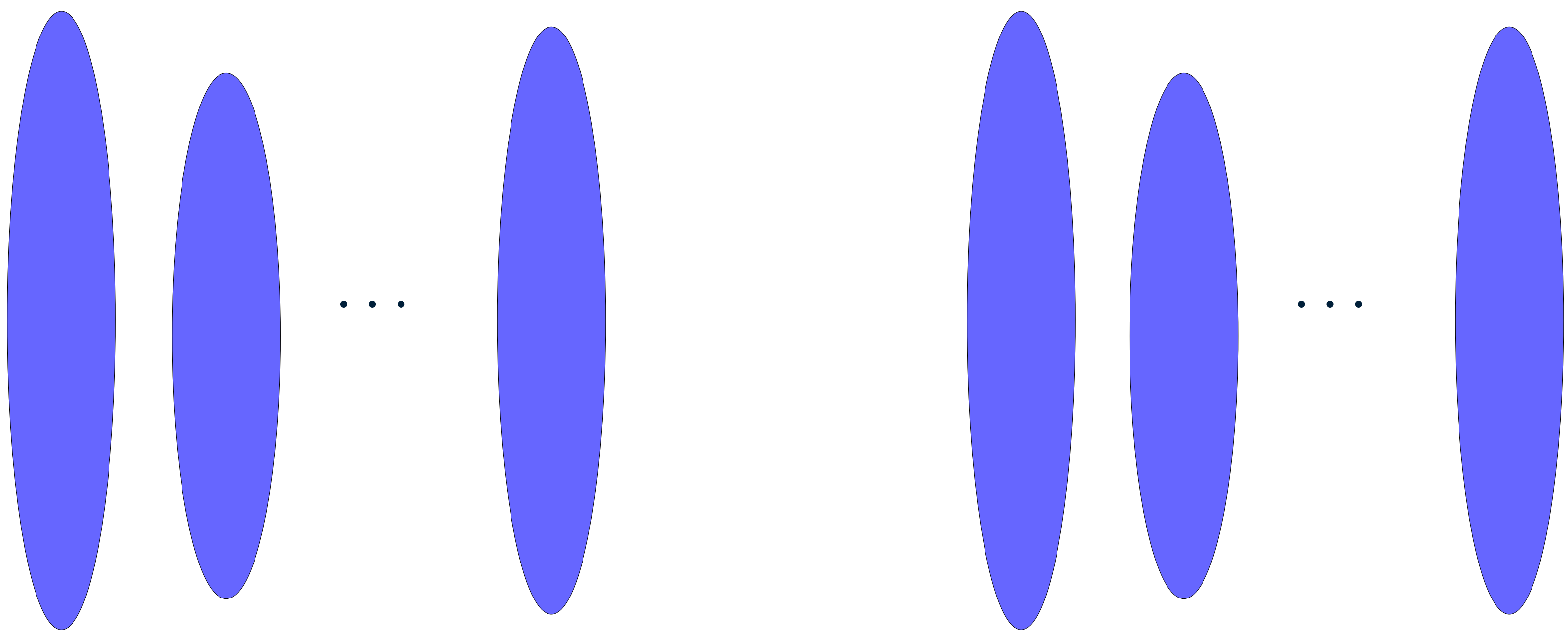
Multicohérences

Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad\qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

Cohérence dans le *bien sûr* :

$$\{x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n\} \qquad\qquad [x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n]$$



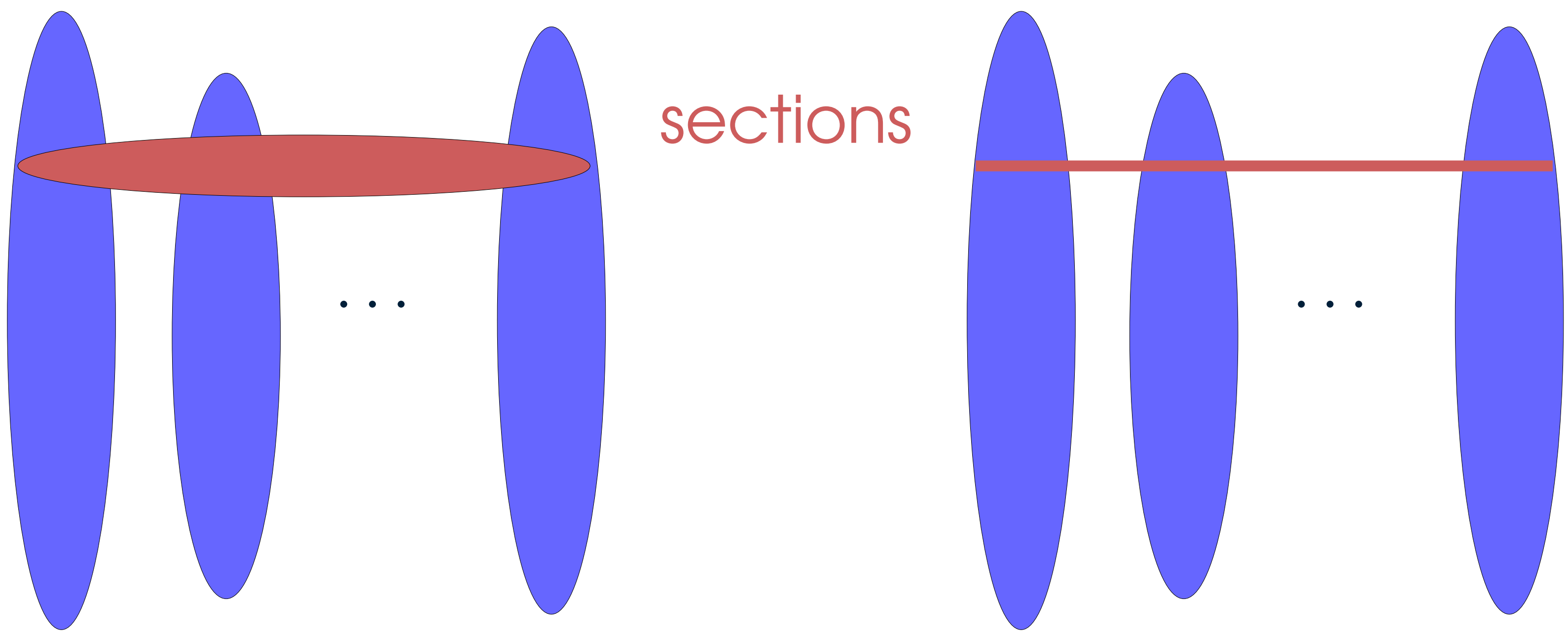
Multicohérences

Cohérence $=$ multi-ensembles finis

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} \qquad\qquad [a, a, b] \neq [a, b]$$

Cohérence dans le *bien sûr* :

$$\{x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n\} \qquad\qquad [x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n]$$



Multicohérences $\neq$ hypercohérences

bool

`v`

`f`

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

!bool

$\{\mathtt{v}\}$

$\{\mathtt{f}\}$

$\emptyset$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{ccccc}
\textbf{!bool} & \otimes & \textbf{!bool} & \otimes & \textbf{!bool} \\
(\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) \\
(\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) \\
(\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\})
\end{array}
$$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{rccccccc}
G = & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \multimap & \mathbf{bool} \\
a = & ((\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) & , & \mathtt{v}) \\
b = & ((\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) & , & \mathtt{v}) \\
c = & ((\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\}) & , & \mathtt{v})
\end{array}
$$

Multicohérences $\neq$ hypercohérences

$$
\begin{array}{rccccccc}
G = & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \otimes & !\mathbf{bool} & \multimap & \mathbf{bool} \\
a = & ((\{\mathtt{v}\} & , & \emptyset & , & \{\mathtt{f}\}) & , & \mathtt{v}) \\
b = & ((\{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\} & , & \emptyset) & , & \mathtt{v}) \\
c = & ((\emptyset & , & \{\mathtt{f}\} & , & \{\mathtt{v}\}) & , & \mathtt{v})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & !G & \multimap & \mathbf{bool} & \\
f = & \{ & (\{a, b\} & , & \mathtt{v}), & \\
 & & (\{c\} & , & \mathtt{f}) & \}
\end{array}
$$

Conclusion et perspectives