
Travaux dirigés 11 : fonctions, fonctions récursives

1 Fonctions récursives

```
1  /* Declaration de fonctionnalités supplémentaires */
2  #include <stdlib.h> /* EXIT_SUCCESS */
3  #include <stdio.h> /* printf() */
4
5  /* Déclarations constantes et types utilisateurs */
6
7  /* Déclarations de fonctions utilisateurs */
8  int factorielle(int n);
9
10 /* Fonction principale */
11 int main()
12 {
13     /* Déclaration et initialisation des variables */
14     int x = 3; /* argument */
15     int res; /* résultat */
16
17     /* calcul */
18     res = factorielle(x);
19
20     /* affichage */
21     printf("%d! = %d\n", x, res);
22
23     /* Valeur fonction */
24     return EXIT_SUCCESS;
25 }
26
27 /* Définitions de fonctions utilisateurs */
28 int factorielle(int n)
29 {
30     int res; /* résultat */
31     if (n > 1) /* cas récursif */
32     {
33         res = n * factorielle(n - 1);
34     }
35     else /* cas de base */
36     {
37         res = 1;
38     }
39     return res;
40 }
```

1. Faire la trace du programme précédent.
2. La suite de Fibonacci est définie récursivement par la relation $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Cette définition doit être complétée par une condition d'arrêt, par exemple : $u_1 = u_2 = 1$. Écrire une fonction qui calcule et renvoie le n -ième terme de la suite de Fibonacci ($n \in \mathbb{N}^*$ donné en argument de la fonction).
3. Il n'est parfois pas suffisant d'avoir un bon cas de base, voici un exemple. En C, que vaut `Morris(1, 0)` ?

```
int Morris(int a, int b)
{
    if (a == 0)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
        return Morris(a - 1, Morris(a, b));
    }
}
```

4. Les fonctions récursives mêmes simples donnent parfois des résultats difficiles à prévoir. Pour s'en convaincre voici un exemple. Pour $n > 100$ la fonction 91 de McCarthy vaut $n - 10$. Mais pour $n < 100$? (Tester sur un exemple... pas trop mal choisi).

```
int McCarthy(int x)
{
    if (x > 100)
    {
        return (x-10);
    }
    else
    {
        return McCarthy(McCarthy(x + 11));
    }
}
```

2 PGCD

Rappel : pour a et d deux entiers naturels, on dit que d divise a , et on note $d \mid a$, s'il existe un entier q tel que $a = dq$. En particulier $d \mid 0$ quel que soit d . Le plus grand diviseur commun (PGCD) de deux entiers naturels a et b est le plus grand entier d tel que $d \mid a$ et $d \mid b$. Cette définition donne un moyen effectif de trouver le PGCD de deux entiers (un algorithme) : il suffit de chercher tous les diviseurs de a et de b et de prendre le plus grand d'entre eux.

1. Que vaut `PGCD(0, 0)` ?
2. Si seulement un des entiers a et b est nul, que vaut `PGCD(a, b)` ?
3. Si aucun des deux entiers a et b n'est nul, jusqu'à quelle valeur doit-on chercher des diviseurs de a et de b ?
4. Comment tester si un nombre en divise un autre, en C ?
5. Écrire une fonction non récursive qui calcule le PGCD de deux entiers naturels.
6. Rappeler l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD.

7. Écrire une fonction récursive pour le calcul du PGCD de deux entiers.
8. À votre avis quelle est la méthode la plus rapide ?

3 Conjecture de Syracuse

Soit la fonction mathématique $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ pair} \\ 3x + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle cette fonction la fonction de Collatz et comme vous pourrez le vérifier sur internet elle a donné et donne toujours du fil à retordre aux mathématiciens. Voici pourquoi.

Soit un entier positif n . Si on calcule $f(n)$, puis $f(f(n))$, puis $f(f(f(n)))$ etc. on finit toujours par tomber sur la valeur 1 quelle que soit la valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Aucun mathématicien n'est arrivé à ce jour à le démontrer (et on ne sait même pas démontrer que c'est indécidable, c'est à dire non démontrable à l'aide des mathématiques usuelles). Cela reste une conjecture.

On peut également formuler le problème avec une suite définie par récurrence u_0 vaut n , et $u_{n+1} = f(u_n)$. Les termes successifs de la suite sont alors : $x, f(x), f(f(x))$ etc. La conjecture est que la suite (u_n) finit par atteindre la valeur 1, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si on poursuit le calcul la suite devient périodique, de période 4, 2, 1, on dit que la suite est entrée dans un puit. Par exemple en partant de 15 on a la suite :

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, (4, 2, 1, 4, 2, 1, ...)

Les mathématicien parlent de la trajectoire de n pour désigner cette suite et il définissent également le temps de vol (le nombre de termes avant le premier 1, ici 17) et d'altitude maximale pour la valeur maximale prise par la suite (ici 160).

1. Écrire en langage C une fonction `Collatz` calculant la valeur de la fonction f sur son argument.
2. Écrire une procédure (un fonction ne renvoyant pas de résultat) *récursive* `Syracuse` qui calcule les itérations successives de la fonction de Collatz sur un entier donné en argument, jusqu'à trouver 1. Pour le moment la fonction `Syracuse` n'affichera rien et ne renverra pas de résultat (mais elle doit calculer chacun des termes successifs de Collatz).
3. Ajouter ensuite un affichage des valeurs successives trouvées dans cette fonction. Dans l'ordre direct. Puis dans l'ordre inverse.
4. En reprenant le code de Syracuse écrire une fonction récursive `temps_de_vol` qui renvoie le nombre d'itérations de la fonction de Collatz nécessaire pour atteindre 1.
5. Question facultative. Comment faire en sorte que le temps de vol soit affiché plutôt que renvoyé comme valeur de retour ?
6. Question facultative. En reprenant le code précédant écrire une nouvelle fonction `altitude` qui renvoie la valeur maximum prise par les termes successifs de l'itération (x compris).